Mathesis
B 3
Math Un 85
—1

Mathesis. Systemata & methodi

130.

R

Lehrbegrif
der gesamten
Mathematik.

Aufgesetzt
von

Wencesl. Joh. Gustav Karsten,
der Phil. Doctor, der Mathem. Professor, und der Churfl. Bayerschen Akademie der Wissenschaften Mitglied.

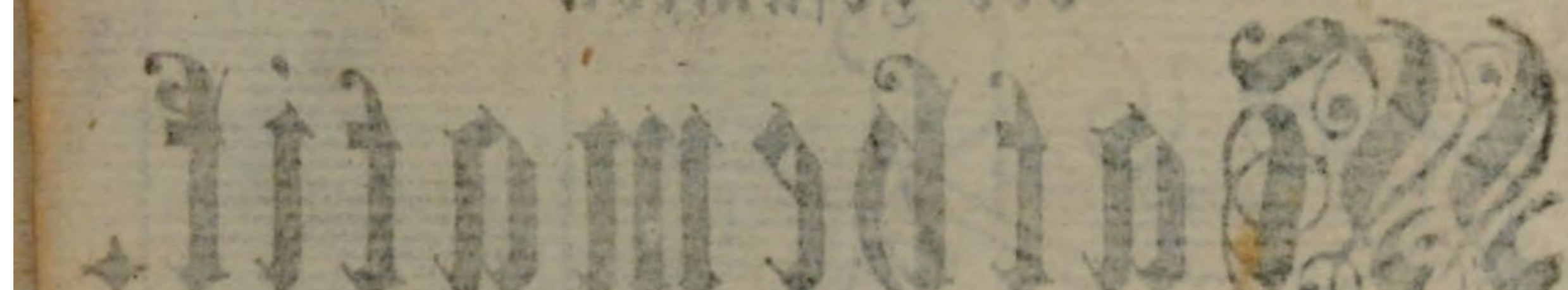
Der erste Theil.

Die Rechenkunst und Geometrie.

Greifswald,
gedruckt und verlegt von Anton Ferdin. Röse. 1767.

Inauguralis

Dissertatio



Electoralis Academiae Scientiarum Borussicae

Socius

Auctor.

Dem

Durchlauchtigsten Herzog und Herrn,

Herrn Friederich,

Regierendem Herzoge zu Meklenburg, Fürsten zu Wenden, Schwerin und Ratzeburg, auch Grafen zu Schwerin, der Lande Rostok und Stargard Herrn,

Bayerische Staatsbibliothek München

Meinem Gnädigsten Herzog und Herrn

unterthänigst.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Durchlauchtigster Herzog,
Gnädigster Herzog und Herr,

Wann Ew. Herzoglichen Durchlauchten in tiefster Ehrfurcht, dieses Buch zu überreichen, und dadurch ein öffentliches Zeugnis von den reinsten Empfindungen der unterthänigsten Dank-

barkeit für so mannigfaltige von Ew. Herzoglichen Durchlauchten mir erwiesene Gnadenbezeugungen der Welt vor Augen zu legen, ich mich erkühne; so hoffe ich, daß Ew. Herzoglichen Durchlauchten nach Höchstderoselben weltgepriesenen Landesväterlichen Hulde solches nicht ungnädig aufzunehmen geruhen werden. Wofern ich in dem Werke, dessen ersten Theil Ew. Herzoglichen Durchlauchten ich hiemit tiefehrerbietigst zu Füssen lege, etwas zu mehrerer Ausbreitung nüzlicher Kenntnisse beygetragen habe, und noch künftig beytragen werde, so ist es meine Pflicht, zugleich der gelehrten Welt zu sagen, daß nur die gnädigsten Ermunterungen, und huldreichsten Unterstützungen von Ew. Herzoglichen Durchlauchten mich in den

Stand gesezt haben, mit dem von Gott mir anvertrauten Pfunde zu wuchern, und solches zum Dienste meines geliebten Vaterlandes anzuwenden. Das Andenken an diejenige ungemeine Gnade und Hulde, wird bey mir Zeitlebens unauslöschlich bleiben, womit Ew. Herzoglichen Durchlauchten vor zweyen Jahren, bey Gelegenheit eines auswärtigen Rufs mir antragen liessen, Höchstderoselben Dienste und mein Vaterland nicht zu verlassen. Konte ich gleich gegen die Gnade eines andern Fürsten nicht unempfindlich seyn, der wie Ew. Herzoglichen Durchlauchten ein grosser Beschützer der Gelehrten und Beförderer der wahren und nüzlichen Gelehrsamkeit ist; so musten mir dennoch die Pflichten gegen meinen gnädigsten Landesherrn und ersten huld-

reichsten Beförderer bey so vielen neuen Gnadenbezeugungen heiliger seyn. Und eben diese Pflichten erheischen es von mir, hiemit Rechenschaft abzulegen, wie ich dem von neuen mir damahls gnädigst übertragenen Lehramt genug zu thun bemühet bin, und wie ich den hiesigen Studirenden den Nutzen der Mathematik auch in der Ausübung zu zeigen suche, wobey einer ganz besondern gnädigsten Unterstützung von Ew. Herzoglichen Durchlauchten ich mich zu erfreuen habe. Diese bestehet in dem Gebrauch derjenigen vortreflichen Instrumente, welche für Höchstderoselben hiesige Akademie von den Aufkünften des in solcher Absicht huldreichst gestifteten Fonds von Jahr zu Jahr angeschaft worden, und deren Ankaufung Höchstdieselben mir

zu

zu übertragen gnädigst geruhet haben. Es sind nicht allein sehr wenige Privat-Personen, die so kostbare Instrumente aus eigenem Vermögen anschaffen können, sondern es giebt auch wenige Akademien, wo dergleichen preiswürdige öffentliche Anstalten zum Nutzen der Wissenschaften vorhanden sind. Um soviel grösser ist die Gnade, welche Ew. Herzoglichen Durchlauchten Höchstderoselben Akademie durch diese Stiftung erwiesen haben: und schon längst habe ich mir eine Gelegenheit gewünscht, wegen dieser, sowohl der hiesigen Universität überhaupt, als auch insbesondre mir erwiesenen höchsten Gnade Ew. Herzoglichen Durchlauchten meine tiefunterthänigste Dankbarkeit öffentlich zu bezeugen. Nie werde ich aufhören, durch

den treuesten Eifer meine Pflichten zu erfüllen, diejenige tiefe Ehrfurcht an den Tag zu legen, mit welcher ich ersterbe

Durchlauchtigster Herzog,
Gnädigster Herzog und Herr,
Ew. Herzogl. Durchlauchten

Bützow
den 9 April 1767.

unterthänigster treugehorsamster
Knecht
W. J. G. Karsten.

Vorrede.

Eine Abhandlung über die Ursachen, warum die Mathematik in Deutschland von vielen noch für eine entbehrliche Wissenschaft gehalten wird, dürfte vielleicht eine angemessene Einleitung zu einer Schrift seyn, wie diejenige nach meiner Absicht werden soll, wovon ich hiemit den ersten Theil liefere. Allein eine vollständige Ausführung davon würde die Grenzen einer Vorrede überschreiten; deswegen werde ich hier nur soviel davon sagen, als mir der Absicht einer Vorrede gemäs zu seyn scheinet, die eigentlich dahin gehen soll, den Leser davon vorläufig zu unterrichten, was

der

der Schriftsteller in dem Werke selbst zu leisten bemühet gewesen ist. Ich werde mich dabey auf die vom H. H. Kästner vor anderthalb Jahren unter dem Titel: Commentarius über eine Stelle des Varro von einer der Ursachen, warum die Mathematik in Deutschland immer noch für unnüz gehalten wird, herausgegebene kleine Schrift beziehen, die dasjenige schon grösstentheils enthält, was ich hier sonst weitläuftiger sagen würde.

Man lernt ordentlich von der Mathematik gar nichts, oder doch viel zu wenig, als daß es einen eigentlichen practischen Nutzen bringen könte. Dies ist die Stelle aus dem Varro, worauf sich die angeführte Kästnerische Schrift beziehet. Vielleicht würden wenigstens einige mehr lernen, wenn man in der Art wie diese Wissenschaft auf Universitäten getrieben wird, einige Aenderungen machte, und die Einrichtung der Lehrbücher selbst in einigen Stücken geändert würde.

würde. Ich sage mit Fleis geändert, und nicht: verbessert würde. Denn ich bin keinesweges gesonnen, weder den Lehrern, deren Verdienste bekant sind, in Ansehung ihres mündlichen Vortrags Fehler beyzumessen, noch auch die mit algemeinem Beyfall aufgenommenen Handbücher dieser Wissenschaft zu tadeln. Vielmehr bin ich überzeugt, daß es ganz unnöthig sey ihnen ein neues an die Seite zu setzen, wenn man sich keine andre Absicht vorsetzet, als die ein Compendienschreiber freylich sonst eigentlich vor Augen haben soll. Ein Compendium soll die Ersten Gründe der Wissenschaft, die es vorträgt, gründlich, deutlich, vollständig, und dabey so kurz als es sich bey diesen dreyen genanten Eigenschaften thun läst, abhandeln. Nun hat freylich die Mathematik den Vorzug, daß sich in derselben eine angenehme Kürze mit besserm Erfolg, als in den übrigen Wissenschaften anbringen läst. Man kan ungemein viel mit wenig Worten, ohne Nachtheil der Deutlichkeit sagen, und

die besten Schriftsteller haben sich allemahl einer solchen Kürze beflissen. Die strenge synthetische Methode, die sich hier vorzüglich anbringen läst, trägt dazu ungemein vieles bey. Allein fast glaube ich, daß dies eine von den Ursachen sey, warum die allermeisten, welche auf Universitäten die Mathematik treiben, entweder gar nichts, oder doch viel zu wenig davon lernen, als daß es einen practischen Nutzen bringen könte. Es giebt in der That nicht viele recht systematische Köpfe, und wenn solche, die nicht gleichsam von Natur schon Geometer sind, noch dazu mit einer Menge von Sachen überhäuft werden, die sie in kurzer Zeit lernen sollen, so werden sie bald ganz verwirrt, verdrieslich, und lassen alles liegen. H. H. Kästner schreibt in dem angeführten Comment. auf der 5 S. folgendes: „ich kan den Fleis und die Gemüthsgaben derer nicht für ganz schlecht erklären, „die sich in der kurzen Zeit eines halben „Jahrs nicht eine solche Menge von Begrif-

sie

fen

„fen und Sätzen der reinen Mathematik,
„vollkommen bekant machen können, als zu
„fertiger Anwendung nöthig ist.“ Wer nur einigermassen den Anfang dieser Wissenschaft nach ihrem gegenwärtigen Zustande kennet, der wird ihm nicht allein in diesem Stücke, sondern auch in demjenigen beypflichten, was er gleich nachher von der angewandten Mathematik saget: „Noch eine grössere Mannigfaltigkeit von Begriffen und Lehren enthält die angewandte Mathematik, auf die „unsre Studirende doch auch noch ein halbes „Jahr wenden u. s. f. Dreyzehn oder vierzehn „Wissenschaften gehören hieher, die sich allenfals in drey oder vier Hauptabtheilungen „bringen liessen, deren jede durch Gründe „und Inhalt sich von den andern sehr unterscheidet. Nur alsdann, wenn auf jede dieser Abtheilungen ein halbes Jahr gewandt „würde, könte man sich von ihr eine zum practischen Gebrauch näher anleitende Kenntnis erwerben.“

Hat dies alles seine Richtigkeit, so weis ich nicht, ob es nicht gerathen sey, in den gewöhnlichen halbjährigen Collegiis lieber weniger Sachen, eben diese Sachen aber ausführlicher vorzutragen, damit die Zuhörer von mittelmäßigen Fähigkeiten (und sind deren wohl nicht gewöhnlich die meisten?) Zeit gewinnen nachzukommen. Wäre es ferner, ebenfals wegen der Zuhörer von mittelmäßigen Fähigkeiten, nicht besser, die für Meister in der Mathematik sonst allerdings angenehme Kürze in den mathematischen Compendien zu vermeiden? Die meisten meiner Leser werden vermuthlich das lezte verneinen, wenn sie gleich das erste noch wohl zugeben. Die Gründe, warum man dies verneinen wird, sind mir bekant, und ich gestehe gern, daß diese Gründe ihr Gewicht haben. Indessen ist soviel gewis, daß ein etwas ausführlicher und mehr auseinander gesezter Vortrag den meisten Anfängern angenehm seyn werde, und das vornemlich aus der Ursache, weil es ihnen die Mühe

S. S. 482

Anfangsgründe der Rechenkunst.

Der I. Abschnitt.

Von einigen Eigenschaften der Zahlen, und ihrer Bezeichnung durch Ziffern.

1 §.

Wofern es gewiß ist, daß wir von manchen Sachen Begriffe haben, die wir durch keine andre Worte deutlicher machen können, als durch eben diejenigen, welche gewöhnlich gebraucht werden, diese Sache anzudeuten; so gehört der Begrif von einer Anzahl unstreitig mit zu dieser Classe. Die Wörter: Vielheit, Menge, Zahl, Anzahl bedeuten einerley. Wer die Sprache versteht, weiß, was diese Wörter sagen wollen. In soferne würde es also eine unnöthige, ja vergebliche Mühe seyn, wenn man suchen wollte, den Begrif von einer Zahl mehr aufzuklären. Inzwischen kan

man die verschiedenen Fälle, wo man mehrere Dinge zusammenzehlt, gegeneinander halten, und auf solche Art ein für allemahl fest setzen, wie die Wörter und Redensarten verstanden werden müssen, die bey diesem Geschäfte gebraucht werden. Dies ist um deswillen nöthig, weil die Rechenkunst eine Wissenschaft ist, die sich mit der Vergleichung verschiedener Zahlen beschäftigen und die Regeln vortragen soll, nach welchen aus gegebenen und bekanten Zahlen andre unbekante gefunden werden können.

2 §.

Wenn man mehrere Dinge zusammenzehlt, so sind es allemahl entweder würklich Dinge von einerley Art, oder man sieht wenigstens beym Zusammenzehlen auf ihre Verschiedenheit nicht. Bey der Frage: wieviel? wird deswegen allemahl zugleich ausgedruckt, was es für Dinge seyn sollen deren Anzahl man wissen will. Sind Personen von beyderley Geschlecht in einem Zimmer bey einander, so muß man unstreitig die Frage: wie viele Mannspersonen sind da? anders beantworten, als die Frage: wieviele Personen überhaupt sind gegenwärtig? Es müssen demnach die zusammengezehlten Dinge, in so ferne sie eine Zahl ausmachen sollen, von einerley Art seyn.

3 §.

Oft komt auch die Grösse der zusammengezehlten Dinge in Betrachtung, obgleich eben nicht allemahl, und sodann müssen die zusammengezehlten Dinge, welche die Zahl ausmachen sollen, auch gleich groß seyn. Bey der Frage: wieviel? wird auch dies gemeiniglich ausgedrückt. Wir haben nemlich in

allen Sprachen eine Menge von Worten, welche nicht allein die Art der Dinge ausdrücken, zu welcher die Sache gehört, sondern zugleich eine bestimte Grösse derselben. Alle Worte, welche die verschiedenen Maasse, Gewichte, Münzen, u. s. f. ausdrücken, gehören hieher. So ist eine Elle eine Länge, die ihre bestimte Grösse hat, ein Pfund ist ein Gewicht von einer bestimten Grösse; Thaler, Gulden, Groschen, u. s. f. sind Münzen, die ihren bestimten Werth haben. Frägt man nun: wieviele Pfunde wiegt diese Waare? wieviele Ellen ist dieses Stück Tuch lang? u. s. f. so verstehet es sich von selbst, daß die Pfunde, oder Ellen, welche man zusammenzehlen soll, gleich groß seyn müssen.

4 §.

Man sieht aber beym zusammenzehlen entweder alle die zusammengezehlten Dinge für sich betrachtet als ganze an; oder man zehlt gleiche Theile eines ganzen zusammen. Das Ganze, das man entweder selbst, oder dessen Theile man mehrmahl zusammenzehlt, heist die Einheit. Eine Menge ganzer Einheiten heist eine ganze Zahl, und eine Menge gleicher Theile der Einheit wird eine gebrochne Zahl, oder ein Bruch genannt. Dieser Unterscheid ist in der Natur der Zahlen selbst, eigentlich nicht gegründet. Eine und eben dieselbe Zahl läst sich als eine ganze oder gebrochne Zahl ansehen, nachdem man die zusammengezehlten Dinge entweder für sich als Ganze, oder als Theile eines andern Ganzen betrachten will. Die Zahl zwey Mark, ist eine ganze Zahl, wenn man ein Mark für sich als ein ganzes ansieht. Die Zahl zwey Drittheil eines

Thalers ist eine gebrochne Zahl, weil man die zusammengezehlten Dinge als Theile eines andern Ganzen, nemlich, eines Thalers, ansieht. Beyde Zahlen sind an sich einerley, weil ein Mark mit einem Drittheil eines Thalers einerley ist. Es wird vor der Hand nur von den ganzen Zahlen die Rede seyn, wenn das Wort Zahl schlechthin gebraucht wird.

5 §.

Man kan von eins anfangen fort zu zehlen, ohne daß man dabey eine gewisse Art von Einheiten in Gedanken hat. Man kan vorwärts und rückwärts zehlen, und die Zahl in Gedanken vermehren, oder vermindern. Man kan ein Paar Zahlen vergleichen und prüfen, ob die eine mehr oder weniger Einheiten enthalte, als die andre, so daß man bey diesem Geschäfte die besondere Beschaffenheit der zusammengezehlten Einheiten gar nicht in Betrachtung zieht. Eine Zahl, bey der die besondre Beschaffenheit der zusammengezehlten Einheiten gar nicht in Betrachtung komt, heist eine abstracte Zahl, in den gewöhnlichen Rechenbüchern heist sie eine ungenante Zahl. Eine concrete, oder genante Zahl ist eine solche, die eine gewisse Menge von Einheiten einer gewissen Art ausdrückt. Die Zahl drey überhaupt ist eine ungenante Zahl, die Zahl drey Pfund aber, eine genante Zahl.

6 §.

Will man ein Paar genante Zahlen mit einander vergleichen, so müssen die Einheiten der einen mit den Einheiten der andern von einerley Art seyn, wiedrigenfalls findet keine Vergleichung statt. Man kan weder sagen, daß drey Pfund mehr, noch daß

sie

sie weniger, als zwey Ellen sind. Man kan aber sagen, drey Pfunde sind mehr, als zwey Pfund. Im Gegentheil lassen sich alle ungenante Zahlen mit einander vergleichen, weil die zusammengezehlten Einheiten bey allen ungenanten Zahlen als Dinge von einerley Art anzusehen sind, indem man keine besondre Art derselben in Gedanken hat.

7 §.

Ein paar Zahlen mit einander vergleichen heist nemlich nichts anders, als eine Prüfung anstellen, ob beyde gleich, oder ungleich groß sind. Ueberhaupt aber kan man eine solche Vergleichung mit allen Dingen anstellen, denen man eine Größe zuschreibt, und man hält die Dinge für gleiche Dinge, wenn eines in Absicht der Größe mit dem andern einerley ist, und also in Absicht der Größe an die Stelle des andern gesetzt werden kan. Eins ist aber dem andern ungleich, wenn beyde in Absicht der Größe nicht einerley sind. Ein Paar ungenante Zahlen werden demnach gleich groß seyn, wenn sie einerley Menge von Einheiten enthalten, und sie werden ungleiche Zahlen seyn, wenn die eine nicht eben die Menge von Einheiten, als die andre ausdrückt. Weil bey den genanten Zahlen die Größe und übrige Beschaffenheit der zusammengezehlten Einheiten selbst mit in Betrachtung komt; so wird bey diesen nicht allein erfordert, daß einerley Menge von Einheiten in beyden vorhanden sey, sondern es müssen auch überdem die zusammengezehlten Einheiten selbst einerley seyn, wenn beyde Zahlen gleich groß seyn sollen. So sind drey Centner und drey Pfunde der Zahl nach einerley, aber nicht dem Gewichte nach; des-

wegen sind es zwar gleiche Zahlen, als Zahlen betrachtet, aber nicht gleiche genante Zahlen.

8 §.

Bey der Prüfung, ob ein Paar Größen einander gleich, oder ungleich sind, verfahren wir allemahl nach gewissen Grundsätzen, die einem jeden bekant sind, und deswegen nur verdienen besonders angemerkt zu werden, weil man in dieser Wissenschaft den höchsten Grad der Gewißheit zu erhalten sucht. Sie könten hier wegbleiben, und dennoch der ganze folgende Vortrag darauf gebauet werden. Allein es hat unstreitig seinen Nutzen, wenn man die Gründe genau kennet, wovon alle Lehren einer Wissenschaft abhängen. Sind diese Gründe von der Beschaffenheit, daß sie Niemand läugnen, oder ihre Wahrheit auch nicht im geringsten in Zweifel ziehen kan; so muß alles, was daraus richtig geschlossen wird, eben so unläugbar seyn, als die Grundsätze selbst sind. Folgenden dreyen Sätzen wird man eine so unläugbare Gewißheit schwerlich absprechen.

9 §.

Eine jede Größe ist sich selbst gleich. Dies will so viel sagen: Eine Größe kan nicht zugleich diese, und eine andre seyn, weil es überhaupt nicht möglich ist, daß etwas zugleich seyn, und nicht seyn könne.

Das Ganze ist allen seinen Theilen zusammen genommen gleich. Dies ist schon eine Folge des vorigen. Alle Theile zusammen genommen sind dasjenige, was wir das Ganze nennen. Wäre das Ganze nun allen seinen Theilen zusammen genommen

genommen ungleich: so wäre es sich selbst ungleich; es würde zugleich dies Ganze, und auch nicht dies Ganze seyn.

Ein Theil, oder einige Theile allein genommen sind nicht so groß als das Ganze. Denn das Ganze, oder alle Theile zusammen genommen, können mit einem oder einigen Theilen allein genommen, der Größe nach nicht einerley seyn.

10 §.

In der That geben die beyden ersten Sätze ein Paar Kenzeichen der Gleichheit, und der dritte ein Kenzeichen der Ungleichheit ab. Der Begrif der Gleichheit, und Ungleichheit ist viel zu algemein, als daß es möglich wäre, eine kurze, und zugleich so bestimte Erklärung davon zu geben, die einen jeden in den Stand setzte, die Anwendung davon allemahl ohne Schwierigkeit zu machen, wenn die Frage vorkomt, ob ein Paar Größen gleich oder ungleich sind? Ja diese Sätze selbst sind noch viel zu algemein, und es muß noch eine Menge andrer Regeln, die genauer bestimt sind, daraus hergeleitet werden, wenn man in jedem vorkommenden Fall auf dem kürzesten Wege die Vergleichung anstellen will. Eben dies ist der wichtigste Vorwurf der Mathematischen Wissenschaften. Bey diesem Geschäfte ist man zugleich auf allerhand Hülfsmittel bedacht gewesen, die Weitläuftigkeit der Worte zu vermeiden, um die Aufmerksamkeit desto mehr auf die Sache zu lenken. Die bekanten Ziffern 1, 2, 3, u. s. f. geben schon die besten Exempel davon ab, daß es nicht allein möglich, sondern in vieler Absicht bequem und nützlich sey, statt der gewöhnlichen Worte viel kürzere

geschriebene Zeichen zu gebrauchen. Man bedienet sich in der Mathematik dieses Zeichens (=) statt des Worts gleich, und setzt es zwischen den Größen, deren Gleichheit man andeuten will, Ausdrücke von dieser Art:

Ein Pfund = sechzehn Unzen
Eine Elle = zwey Fuß u. s. f.

bedeuten demnach eben so viel, als wenn man geschrieben hätte: Ein Pfund ist gleich sechzehn Unzen, eine Elle ist gleich zweyen Füßen.

11 §.

Aus folgenden zwoen Sätzen:

Eine Elle = zwey Fuß,
zwey Fuß = vier und zwanzig Zoll,

würde man ohne Bedenken diesen dritten Satz als eine Folge herleiten: Eine Elle = vier und zwanzig Zoll. In der That gründet man diesen Schluß auf folgenden algemeinen Grundsatz:

Wenn zwo Größen einer und eben derselben dritten gleich sind: so sind sie auch unter sich gleich.

Dies ist ein neues Kenzeichen der Gleichheit, dessen man sich bedienet, gewisse Größen vermittelst einer dritten zu vergleichen. Man kan hiemit folgenden Satz verbinden:

Wenn zwo Größen so groß sind, als zwo andre gleiche Größen, so sind sie unter sich gleich groß.

Dieser letzte dienet in solchen Fällen zur Verkürzung, wo man den vorigen zweymahl brauchen müste.

12 §.

12 §.

Sind zwo Größen einander ungleich: so heist allemahl die eine von beyden die größere, und die andre die kleinere. Es wird nemlich die eine von beyden einen Theil, der so groß ist, als die andre ganz genommen, und überdem noch etwas mehr enthalten. Diese heist die größere, und die andre, welche einem Theil der ersten gleich ist, die kleinere. Folgende Grundsätze dienen als Kenzeichen des Größern und Kleinern.

Jeder Theil des Ganzen allein, oder auch einige Theile des Ganzen allein genommen, sind kleiner, als das Ganze.

Das Ganze ist grösser, als jeder Theil desselben allein, oder einige Theile desselben allein genommen.

13 §.

Die Ungleichheit zwoer Größen deutet dies Zeichen (>) an, welches man zwischen ihnen so setzet, daß die Oefnung gegen die größere, und die Spitze gegen die kleinere zeigt. Wenn man also schreibt:

Ein Centner > ein Pfund

Ein Pfund < ein Centner;

so ist dies einerley, und bedeutet, daß ein Centner mehr als ein Pfund, oder ein Pfund weniger, als ein Centner sey.

Aus diesen zwenen Sätzen:

Ein Centner > ein Pfund

Ein Pfund = sechzehn Unzen,

wird man wiederum ohne Bedenken den dritten Satz schliessen:

Ein Centner > sechzehn Unzen.

Der Schluß gründet sich auf die algemeine Regel:

Was gröſſer ist, als eine von zwoen gleichen Gröſſen, das ist auch gröſſer, als die andre.

Ist dies allemahl richtig, so wird man auch folgende Regel gelten lassen:

Was kleiner ist, als eine von zwoen gleichen Gröſſen, das ist auch kleiner, als die andre.

Um so mehr werden auch diese Regeln unläugbar richtig seyn:

Was gröſſer ist, als die Gröſſere von zwoen ungleichen Gröſſen, das ist auch gröſſer, als die kleinere.

Was kleiner ist, als die Kleinere von zwoen ungleichen Gröſſen, das ist auch kleiner, als die gröſſere.

14 §.

Wir urtheilen in unzähligen Fällen im gemeinen Leben nach diesen Grundregeln, ob wir gleich eben nicht gewohnt sind, sie in der Algemeinheit auszudrücken, in welcher sie hieher gesetzet sind. Aber eben hiedurch werden sie in der ganzen Mathematik brauchbar. Es sind noch verschiedene dergleichen algemeine Grundsätze übrig, die besonders angemerkt zu werden verdienen, und diese werden nach einander vorkommen, so wie die verschiedenen Methoden werden erklärt werden, wie man aus gegebenen Gröſſen andre finden kan, die man in der Rechenkunst zuerst auf die Zahlen anwendet. Es sollen deswegen nunmehro zuförderst die Zeichen beschrieben werden, welche man statt der gewöhnlichen Worte gebraucht, die Zahlen dadurch auszudrücken. Diese Zeichen werden Ziffern genannt. Man setzt sie alle aus zehn

einfachen Ziffern zusammen, deren Bedeutung einem Jeden von Jugend auf bekant wird, der es lernt, wie man die ausgesprochenen Worte in Schriften bezeichnet. Es sind folgende:

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0.

Das Zeichen 0 ist eigentlich das Zeichen einer leeren Stelle, die vermöge des Gesetzes, nach welchem man eine Ziffer zusammensetzt, keine von den übrigen einfachen Ziffern einnehmen kan.

15 §.

Die Art, wie aus diesen einfachen Ziffern alle übrige zusammengesetzt werden, lernt man am besten verstehen, wenn man auf folgende Umstände acht hat, welche beym gewöhnlichen zehlen beobachtet werden. Man zehlet fort von eins bis zehn, und fängt sodann wieder von forne an zu zehlen, da dann die ersten zehn Zahlen ihre eigene Nahmen haben. Nun zehlt man weiter **eins und zehn, zwey und zehn**, welche Ausdrücke verkürzt in unsrer Sprache so lauten: eilf, zwölf. Bey den folgenden Ausdrücken, **drey und zehn**, u. s. f. läst man das Wort und weg, und zehlet so fort, bis man auf **zehn und zehn** oder zweymahl zehn komt. Zur fernern Abkürzung sagt man **zwanzig**, statt zweymahl zehn, **dreißig**, statt dreymahl zehn, u. s. f. bis auf zehn mahl zehn, oder **hundert**, da man dann wiederum von forne an zehlt: hundert und eins, u. s. f. bis zweyhundert, dreyhundert, u. s. f. da dann wiederum folgende Worte zur Verkürzung gebraucht werden.

Man spricht aus	durch das Wort
zehn mahl hundert	tausend
tausend mahl tausend	Million
tausend mahl tausend Millionen	Billion
tausend mahl tausend Billionen	Trillion
tausend mahl tausend Trillionen	Quadrillion

u. s. w.

Um nun aber dasselbe durch die geschriebenen Ziffern auszudrücken, was man bey den Worten beobachtet, hat man folgendes Gesetz angenommen.

Man schreibt die Ziffern von der rechten gegen die linke Hand, und läst jede Ziffer in der folgenden Stelle zehnmahl mehr bedeuten, als in der nächstvorhergehenden. In die Stellen, welche ledig bleiben müssen, setzt man die so genante Null.

Auf die Art bekomt jede Ziffer, ausser dem eigenthümlichen Werth, den sie schon ausdrücken würde, wenn sie allein stünde, noch einen andern von der Stelle, die sie unter den übrigen einnimt.

16 §.

Rechnet man also die Stellen von der rechten gegen die linke Hand: so bedeutet die Ziffer 1

		und man schreibt
in der ersten Stelle	eins	1
= = zweyten =	zehn	10
= = dritten =	hundert	100
= = vierten =	tausend	1000
= = fünften =	zehntausend	10000
= = sechsten =	hunderttausend	100000
= = siebenden =	eine Million	1000000
= = achten =	zehn Millionen	10000000

Hier=

Hieraus ist leicht abzunehmen, wie es mit den übrigen Ziffern nach eben der Regel zu halten sey. Stünde die Ziffer 2 allenthalben da, wo die Ziffer 1 steht; so wären ihre Werthe diese: zwey, zwanzig, zweyhundert; zweytausend; zweyhunderttausend; zwey Millionen; zwanzig Millionen. Es bestehen demnach alle zusammengesetzte Ziffern aus einfachen Ziffern verschiedener Ordnungen. Die Ziffern in der ersten Stelle bedeuten einfache Einheiten. Die Ziffern in der zweyten Stelle oder der ersten nach den Einern, bedeuten zehnfache Einheiten, und gehören zur ersten Decimal-Ordnung. Eben so gehören die Ziffern in der dritten Stelle oder der zweyten nach den Einern; zur zweyten Decimal-Ordnung u. s. w. allemahl von der Rechten gegen die Linke gerechnet.

17 §.

Ohne Zweifel hat man Anfangs auch die geschriebenen Ziffern von der Rechten gegen die Linke zu gelesen. Die meisten Morgenländer sind überhaupt gewohnt gewesen so zu schreiben, und die gewöhnliche Meinung ist, daß wir diese Ziffern von den Arabern bekommen haben. Wollte man diese Regel in der Aussprache beobachten, so würde es nun weiter keine Schwierigkeit haben, jede geschriebene zusammengesetzte Ziffer auszusprechen. Es würde z. E. die Ziffer:

4275136

so zu lesen seyn: Sechs und dreißig und hundert und fünftausend, und siebenzigtausend und zweyhunderttausend, und vier Millionen.

Es hat aber auch keine größere Schwierigkeit, die Ordnung umzukehren, und nach der Art, wie wir zu lesen, und zu schreiben gewohnt sind, von der Linken gegen die Rechte zu lesen. Hiebey muß man nur zuförderst die Stellen von der Rechten gegen die Linke zehlen, damit man wisse, in welcher Stelle die letzte Ziffer zur Linken befindlich sey, indem sie hiedurch ihren Werth bekomt. Damit man sich nun in der Aussprache desto weniger versehe, theile man die ganze Ziffer, von der Rechten gegen die Linke zu, in Classen, so daß jede Classe sechs Ziffern enthalte, da es dann gleichviel ist, wieviel Ziffern die letzte zur Linken bekomt. Man setze oberwärts an der siebenten Ziffer einen Strich (′) an der dreyzehnten, zwey Striche (″) u. s. f. so weiß man, wo die Millionen, Billionen, u. s. f. anfangen; da denn die übrige Aussprache sich nach der Regel des 15 §. leicht ergiebt.

18 §.

Man hat aber dabey in der Aussprache die öftere Wiederholung eines und eben desselben Worts: Million, Billion, u. s. f. vermeiden wollen, die bey einer ganz genauen Beobachtung der Regel in der Aussprache erforderlich seyn würde: und deswegen spricht man allemahl eine ganze Classe von sechs Ziffern auf einmahl aus, bevor man die Millionen, Billionen u. s. f. nennt. Aber auch bey der Aussprache einer solchen ganzen Classe, würde das Wort: tausend, oft dreymahl müssen genannt werden. Deswegen läßt man es, um die Aussprache noch mehr abzukürzen, auch so lange weg, bis es zum drittenmahl gehöret werden sollte. Und da dies allemahl in der Mitte einer jeden Classe geschehen müste; so kan man eine

jede

jede Classe durch ein Comma (,) in zwo Hälften theilen, und das Comma durch tausend aussprechen. Nun komt es nur darauf an, daß man eine Ziffer aussprechen könne, die aus dreyen einfachen zusammengesetzt ist, so kan man jede andre aussprechen. Am natürlichsten würde man bey der uns gewöhnlichen Art, von der linken gegen die Rechte zu lesen, zuerst die hunderte, dann die zehner, und zuletzt die einer aussprechen, so, daß z. E. die Ziffer 365 so gelesen würde: dreyhundert und sechzig und fünf. Allein es ist durch den Redegebrauch eingeführt, daß man die Einer vor den Zehnern ausspricht, und also die obige Ziffer so liest: dreyhundert und fünf und sechzig. Hätte man also die Ziffer:

75''''840,937'''528,296''364,709'007,283

welche nach obiger Vorschrift abgetheilt ist: so würde sie so gelesen werden müssen:

Fünf und siebenzig Quadrillionen, achthundert und vierzig tausend, neunhundert und sieben und dreißig Trillionen, fünfhundert und acht und zwanzig tausend zweyhundert und sechs und neunzig Billionen, dreyhundert und vier und sechzig tausend sieben hundert und neun Millionen, sieben tausend zweyhundert und drey und achtzig.

Der II. Abschnitt.

Von der Addition und Subtraction in ganzen Zahlen.

19 §.

Wenn zwey Zahlen ungleich sind: so ist die kleinere in der größern ganz enthalten, und überdem noch etwas mehr. (12 §.) So ist die Zahl 8 in der Zahl 14 ganz enthalten, und überdem enthält die Zahl 14 noch 6. Dieser Ueberschuß, um welchen eine Größe eine andere Kleinere übertrift, heist die Differenz beyder Größen, auch wohl das Complement der kleinern Größe zur größern: und eine Größe, die zwoen, oder mehrern zusammengenommen gleich ist, wird die Summe der letztern genannt. So ist 6 die Differenz der Zahlen 14 und 8, und 14 ist die Summe der Zahlen 8 und 6. Zwey oder mehr Größen zusammen addiren heist ihre Summe suchen. Eine kleinere Größe von der größeren subtrahiren heist ihrer beyder Differenz suchen.

20 §.

Auch bey diesem Geschäfte sind kurze Zeichen eingeführt, wodurch man, statt der gewöhnlichen Worte, die Addition und Subtraction andeutet. Das Zeichen (+) bedeutet die Addition, und man setzt es zwischen beyden Größen die addirt werden sollen. Diesemnach muß der Ausdruck 16+3=19 so verstanden werden: zu 16 addirt 3, giebt 19.

Der

Der Bequemlichkeit wegen spricht man das Zeichen (+) durch mehr, oder *plus* aus, weil es die eine Größe um die andre vermehrt. Das Zeichen der Subtraction ist ein Strich (—), welchen man vor derjenigen Größe setzt, die von der andern subtrahirt werden soll. So heist der Ausdruck: 16—3=13 so viel als: von 16 subtrahirt 3, läst 13. Man spricht der Kürze wegen dies Zeichen durch das Wort weniger, oder *minus* aus, weil es die größere Zahl um die kleinere vermindert.

Es kan seyn, daß die Größe, welche man von einer andern subtrahiren soll, selbst schon eine Summe, oder Differenz andrer Größen ist. In diesem Fall schliest man sie, Verwirrung zu vermeiden, in eine Parenthese ein. So bedeutet 9—(3+2) so viel, als 9—5, und 9—(3—2) so viel, als 9—1. Ueberhaupt also bedeutet der Ausdruck A—(B+C) den Rest, welcher übrig bleibt, wenn die Summe B+C, und A—(B—C) den Rest, welcher übrig bleibt, wenn die Differenz B—C von A subtrahirt worden.

21 §.

Die Addition und Subtraction sind einander so entgegen gesetzt, daß eine die andre aufhebt. Es fällt in die Augen, daß 12+4—4=12 sey. Will man dies algemein ausdrücken: so giebt es den Grundsatz:

Wenn zu einer Größe eine und eben dieselbe andre Größe zugleich addirt und wieder von ihr subtrahirt wird; oder zuerst von ihr subtrahirt, und hernach wieder addirt wird: so leidet die erste Größe gar keine Aenderung.

22 §.

Wenn zwey Zahlen durch einfache Ziffern ausgedruckt sind, und also keine derselben größer als 9 ist: so kan man leicht die Summe beyder Zahlen in Gedanken finden, und durch die zugehörige Ziffer, nach der Regel des 15 §. ausdrücken.

23 §.

Es sind zwo Zahlen gegeben, man soll beyde zusammen addiren.

Aufl. I. Man schreibe beyde Zahlen von der Rechten gegen die Linke so untereinander, daß die einfachen Ziffern, welche zu einerley Ordnung gehören, untereinander zu stehen kommen, und ziehe der Bequemlichkeit wegen einen Strich darunter, um die gegebenen Zahlen dadurch von der gesuchten Summe abzusondern.

II. Sodann addire man die Ziffern, die zu einerley Ordnung gehören, für sich allein zusammen, und schreibe die einzelnen, nach dem 22 §. gefundenen Summen nach und nach untereinander, wiederum so, wie es die verschiedenen Ordnungen der einfachen Ziffern erfordern, indem man von der Rechten gegen die Linke von den Einheiten der niedern Ordnung, auf die nächst größere Ordnung fort geht.

III. Wenn man nun diese einzelnen Summen wiederum als gegebene Zahlen ansieht, und aufs neue wie vorhin, die einzelnen untereinander stehenden Ziffern summirt: so kan keine dieser einzelnen Summen über 9 steigen, und es komt in jeder Classe nur eine einfache Ziffer zu stehen, welche zusammen eine zusammengesetzte Ziffer ausmachen, so die gesuchte Summe ausdrückt.

Exem-

Exempel.

15683	578989	9999
7437	47947	999
10	16	18
11	12	18
12	18	18
4	15	9
11	11	10998.
23120	5	
	626936	

Beweis. Es soll die gesuchte Summe ein ganzes seyn, welches alle die Theile zusammen genommen enthält, woraus die gegebenen Zahlen zusammen gesetzt sind. Da man nun nacheinander die Einheiten einer jeden Ordnung zusammen zehlt: so erhellet, daß die zusammengesetzte Ziffer, welche man zuletzt herausbringt, alle die Theile zusammen genommen ausdrücke, welche in den beyden gegebenen Zahlen enthalten sind. Daß aber die Voraussetzung der dritten Regel ihre Richtigkeit habe, beweiset das letzte Exempel, denn es kan beym ersten Summiren keine größere Summe, als 18, und also eben beym zweyten Summiren nicht mehr als 9 in jeder Classe herauskommen.

Practische Verkürzung dieser Auflösung.

In der Ausübung komt es nicht darauf an, sich an die theoretischen Regeln so genau zu binden, wenn man durch einen kürzern Weg eben das Resultat herausbringen kan. Die kürzern Wege sind hier vielmehr allemahl den Umwegen vorzuziehen. Wenn

beym ersten Summiren die einzelnen Summen größer als 9 sind, und dieserwegen aus zweyen Ziffern bestehen; so kan die niedrigste nicht größer als 8 seyn, die höchste aber, welche in die folgende Classe komt, ist allemahl 1. Diese 1 wird beym zweyten Summiren zur ersten Ziffer der folgenden einzelnen Summe addirt. Man kan demnach diese 1 in Gedanken, (in mente) behalten, ohne sie hinzu schreiben, und sie zur Summe der beyden Ziffern der folgenden Ordnung sogleich hinzu zehlen, da man denn allemahl wiederum nur die niedrigste Ziffer niederschreibt, bis man zur höchsten Classe komt, da dann die höchste Summe ganz niedergeschrieben wird. Auf die Art wird Raum auf dem Papier, und Zeit ersparet.

Exempel.

74893064270936
58429037869

74951493308805

24 §.

Es sind mehr, als zwey Zahlen *A, B, C, D*, gegeben, man soll alle in eine Summe bringen.

Aufl. Man addire zuerst A und B; zur Summe A+B addire man die dritte Zahl C, und zu dieser neuen Summe A+B+C die vierte D, so erhält man A+B+C+D. Es fällt in die Augen, daß man auf die Art fortfahren könne, es mögen so viele Zahlen, als man will, gegeben seyn. Die Rechnung würde demnach so zu führen seyn.

75436 A
328 B
9836 C
629 D.

75436 A
328
75764 A+B
9836
85600 A+B+C.
629
86229 A+B+C+D.

Practische Verkürzung.

Es ist im 22 §. angenommen worden, daß man ohne Schwierigkeit zwey Zahlen, deren keine größer als 9 ist, in Gedanken zusammen zehlen, und die Summe durch die ihr zugehörige Ziffer ausdrücken könne. Mehreres wird in der Theorie nicht erfordert, weil diese alle Operationen der Rechenkunst von den leichtesten und einfachsten herleitet. Wenn man inzwischen oft rechnet, so gewöhnt man sich leicht daran, mehr als zwey einfache Ziffern, oder Zahlen, deren keine größer als 9 ist, in Gedanken zusammen zu zehlen, da denn freylich, wenn derselben viele sind, die Summe ziemlich groß werden kan. Sie mag aber so groß werden, als sie wolle; so könnte man nun die einzelnen Summen gehörig untereinander setzen, sodann diese Summen von neuen summiren, und hiemit so lange fortfahren, bis sich zuletzt eine zusammengesetzte Ziffer ergiebt, so die ganze Summe ausdrückt. Auf die Art würde man mit dem vorigen Exempel so zu verfahren haben:

75436
328
9836
629

29
10
21
14
7

Summe 86229.

Aber auch hier kan man die Verkürzung brauchen, daß man in den einzelnen Summen nur die niedrigste Ziffer niederschreibt, und alles das in Gedanken gleich zur folgenden Classe addirt, was bey der zweyten Addition hinzukommen würde. Auf die Art wird das ganze Schema der Rechnung sehr ins Kurze gezogen, das sonst bey großen und vielen Zahlen sehr weitläuftig gerathen würde. Wie davon folgendes Exempel zeugt.

999
1289
998
9999
9999
999
99
93978
197949

79
73
65
29
18
1

109
12
15
10
2

316309

Verkürzte Art.

999
1289
998
9999
9999
999
99
93978
197949

Summe 316309

Man hat hier in der ersten Classe die Summe 79, deswegen schreibt man nur 9 nieder, und behält 7 in mente, zehlt diese 7 zur Summe 73 der folgenden Classe, so hat man 80. Man schreibt also nur die 0 nieder, und zehlt 8 zur folgenden Summe 65, so hat

man 73, womit man eben so bis zu Ende umgeht.

Bey einer noch größern Menge gegebener Zahlen, kan es seyn, daß die einzelnen Summen jeder Classe über hundert, ja noch weiter hinaus gehen, da sie dann für sich allein schon aus dreyen ja noch mehreren Ziffern bestehen würden. Weil es hier würklich schon beschwerlich wird, so große Summen in Gedanken zusammen zu zehlen, und man sich leicht dabey versehen kan: so ist es fast am besten, das Exempel zu theilen, und etwa zehn und zehn von den gegebenen Ziffern besonders zu summiren; da sich denn zuletzt aus diesen besondern Summen bequemer die Hauptsumme finden läst. Will man inzwischen bey der vorigen Art bleiben: so ist noch allemahl die Regel zu beobachten, daß man unter jeder Columne nur die niedrigste Ziffer ihrer Summe niederschreibt, und die übrigen sogleich zur folgenden Classe rechnet, wie im nachstehenden Exempel. Hier giebt die erste Columne die Summe 142, also schreibt man 2 nieder, und behält 14 in mente. Die zweyte Columne giebt die Summe 132. Hiezu rechnet man die in mente gebliebenen 14, so erhält man 146, wovon man 6 niederschreibt, und abermahl 14 in mente behält. Die dritte Columne giebt 117, welches mit den in mente gebliebenen 14 zusammen 131 ausmacht. Also schreibt man 1 nieder, und behält 13 in Gedanken. Wenn man so durch alle Classen fortgehet: so ergiebt sich auf einmahl die ganze gesuchte Summe.

999
7899
4999
799
9989
99999
9479
99999
9499
99999
9479
99999
94299
4729
999
9999
563162.

25 §.

Es ist nur noch übrig, der bisherigen Lehre von der Addition ein Kenzeichen der Gleichheit und ein Paar Kenzeichen der Ungleichheit anzufügen, die aus dem Begrif der Addition unmittelbar folgen. Es sind folgende:

Wenn zwey Grösen einander gleich sind, und man addirt zu ihnen gleiche Grösen; so müssen die Summen gleich groß seyn.

Wenn aber zwey Grösen ungleich sind, und man addirt zur grösern eben so viel, als zur kleinern: so ist die erste Summe grösser, als die zweyte.

Addirt man demnach zur grösern mehr, wie zur kleinern: so wird noch um so mehr die erste Summe grösser, als die zweyte seyn.

26 §.

Wenn von einer Ziffer, die nicht grösser ist, als die grösseste mögliche Summe zwoer einfachen Ziffern; (also nicht grösser als 18) eine einfache Ziffer subtrahirt werden soll: so ist es leicht in Gedanken die Differenz zu finden, und durch die ihr zugehörige Ziffer auszudrücken.

27 §.

Es sind zwey ungleiche Zahlen gegeben, man soll die kleinere von der grösern subtrahiren.

Aufl. I. Man schreibe die kleinere Zahl unter der grösern, so wie bey der Addition, damit die Ziffern von einerley Ordnung untereinander zu stehen kommen.

II. Wenn nun in der kleinern Zahl jede einfache Ziffer kleiner ist, als die darüber stehende: so zehle man in Gedanken die kleinere von der größern zurück (26 §.), und setze was übrig bleibt, darunter. So würde man mit folgenden Exempeln umgehen können.

987468	432789645
736254	320645413
Rest 251214	Rest 112144232

III. Sind unter den Ziffern der kleinern Zahl einige größer, als die drüber stehenden, wie im beygefügten Exempel, wo in der Zahl B, bey den Ziffern der ersten und vierten Decimal-Ordnung dieser Fall statt hat, so darf man nur erwegen, daß die Ziffer A aus folgenden Theilen durch die Addition sich zusammensetzen lasse.

547328	A
465296	B

A { 128, 1472, 4 }
B 465296

Rest: 82032.

Nun kan man so subtrahiren: 6 von 8 bleibt 2, 9 von 12 bleibt 3. Es ist nemlich eine Einheit der zweyten Decimal-Ordnung einerley mit zehn Einheiten der ersten Decimal-Ordnung. Wenn man demnach eine Einheit der zweyten Ordnung zu den Einheiten der ersten Ordnung rechnet: so werden diese dadurch um zehn Einheiten vermehrt. So kan man nun überhaupt zu einer jeden der einfachen Ziffern in A, die zu klein sind, als daß man davon die unten-

stehende subtrahiren könte, eine Einheit zurechnen, die man von der nechsthöhern Ordnung abnimt, wodurch die nechstniedrige allemahl um 10 vermehrt wird. Da nun die untenstehende nie größer als 9 ist; so wird man sie allemahl nach §. 26. subtrahiren können. Wann im Exempel bey der vierten Decimal-Ordnung nochmahl der Fall vorkomt: so sieht man leicht, daß man so subtrahiren müsse: 6 von 14 bleibt 8.

IV. Es ist zur Beobachtung dieser Regel eben nicht nöthig, die Zahl A so wie vorhin geschehen ist, in Theile zu vertheilen. Dies ist hier nur deswegen geschehen, um den Grund des in diesem Fall geschehenen Verfahrens desto deutlicher vor Augen zu legen. Man kan sogleich zu solcher Ziffer in A, die kleiner ist, als die untenstehende, in Gedanken 10 zurechnen, und sodann die untenstehende subtrahiren. Weil aber hiedurch die in A folgende Ziffer der nechsthöhern Ordnung um eins vermindert worden; so ist es rathsam, dies durch ein willkührliches Zeichen, z. E. durch einen drüber gesetzten Punkt zu bemerken, damit man diesen Umstand bey der folgenden Subtraction nicht vergesse. Man drückt sich hier gewöhnlich so aus: Der Punkt zeige an, daß man von der Ziffer eins geborget habe. Das Schema der Rechnung würde nun so aussehen.

547328	7923264930
465296	98697898
Rest 82032	Rest 7824567032

V. Bey diesem sogenanten Borgen kan der Fall vorkommen, daß die Ziffer, wovon man 1 borgen soll,

soll, die o ist, und so läst sich davon nichts abnehmen. Folgt nun nach der o eine Ziffer: so verfährt man damit, wie vorhin. Man borgt davon 1, und zeigt dies durch einen Punkt an, so hat man 10 statt der o. Von diesen 10 kan man nun wieder 1 zur folgenden Classe borgen; so bleiben es 9, wie in folgenden Exempeln.

.. 10. 10. 10.	.. 10. 10. 10.
7804397	68020934
5965878	39493269
Rest 1838429	Rest 28526765.

Es ist in der Ausübung nicht nöthig, wie hier geschehen ist, die 10 über der o würklich hinzusetzen; und durch einen Punkt anzuzeigen, daß etwas wieder davon weggeborget sey. Man darf nur ein für allemahl diese Regel merken:

Wenn man über eine o wegborget, so ist es so gut, als wenn man die o in 9 verwandelt hätte.

IV. In dieser Regel läst sich selbst auf die Fälle erweitern, wenn mehrere Nullen nacheinander folgen. Man muß sodann von der Ziffer, die nach der letzten Null folgt, 1 borgen. hiedurch erhält man 10 an die Stelle dieser o, von diesen 10 borgt man wiederum 1 weg in die nechst niedrigere Classe, so erhält man in dieser wiederum 10, und in jener bleiben 9. So geht man fort durch alle Classen der nach einander folgenden Nullen, wie im nachstehenden Exempel:

.10.10.10.10.10. . .10.10.
70000080062 0034
19863279384 0269
Rest: 50136800677 9765.

Es

Es ist in der Ausübung wiederum nicht nöthig, die Ziffern 10, nebst den Punkten über den Nullen hinzusetzen, welches hier nur mehrerer Deutlichkeit wegen so gemacht ist. Denn die vorige Regel läst sich nun algemeiner so ausdrücken.

Wenn man über mehrere nach einander folgende Nullen wegborget; so ist es eben so gut, als ob man jede dieser Nullen in 9 verwandelt hätte.

28 §.

Wenn zwo Größen gleich sind, und man subtrahiret von ihnen gleiche Größen: so werden die Differenzen oder Reste gleich seyn.

Dieser für sich klare Satz giebt abermahl ein Kenzeichen der Gleichheit ab, und man kan damit zugleich folgende zwey Kenzeichen der Ungleichheit verbinden.

Wenn zwey Größen ungleich sind, und man subtrahirt von der größern eben so viel, als von der kleinern: so ist der erste Rest größer, als der zweyte.

Wenn aber zwey Größen gleich sind, und man subtrahirt von der einen mehr, als von der andern: so wird der erste Rest kleiner, als der zweyte seyn.

29 §.

Wenn man die abgezogene Zahl zum Rest addirt, so muß die größere Zahl, wovon man jene subtrahirt hat, wieder herauskommen (21 §.). Dies dienet zur Prüfung, ob man richtig subtrahirt habe, oder in der Rechnung ein Fehler eingeschlichen sey. Denn komt die größere Zahl nicht wieder heraus, und man hat beym addiren nicht gefehlt; so ist es gewiß, daß man

man beym subtrahiren gefehlt habe. Man kan auch den Rest von der grösseren Zahl subtrahiren, so muß die abgezogene kleinere Zahl herauskommen, weil diese mit dem Rest zusammen genommen, der grössern gleich seyn soll. Auf ähnliche Art läst sich die Addition prüfen. Hat man nemlich zwey Zahlen zusammen addirt, und subtrahirt eine derselben von der Summe; so muß die andere zum Rest bleiben. Hat man drey Zahlen zusammen addirt, und man subtrahirt von der Summe die eine derselben: so muß die Summe der beyden übrigen zum Rest kommen. Es erhellet leicht, daß diese Prüfung sich auf so viele zusammen addirte Zahlen, als man will, erstrecke. Wenn eine der summirten Zahlen vom Rest subtrahirt wird; so muß der Rest so groß seyn, als die Summe aller übrigen summirten Zahlen.

Der III. Abschnitt.

Von der Multiplication mit ganzen Zahlen.

30 §.

Es können alle Zahlen, die man nach dem 23 §. zusammen addirt, gleich groß seyn, wie in dem beygefügten Exempel. Hier wird die Zahl 318 in der Summe 954 dreymahl enthalten, oder, welches einerley ist, die Summe 954 dreymal größer, als die Zahl 318 seyn. Man könte dies mit andern

318
318
318
954

Wor-

Worten auch so ausdrücken. Wenn die Zahl 954 in drey gleiche Theile getheilt wird: so ist jeder Theil 318. Nun heist überhaupt ein solcher Theil, der in dem Ganzen genau etliche mahl enthalten ist, ein aliquoter Theil des Ganzen, oder ein Maaß des Ganzen, (pars aliquota, mensura, submultiplum) und das Ganze selbst heist ein vielfaches (multiplum) eines solchen Theils. Die Wörter ein zweyfaches, oder doppeltes, dreyfaches, vierfaches, u. s. f. (duplum, triplum, quadruplum) drücken es speciceller aus, wie oft das Ganze in jedem besondern Fall den aliquoten Theil desselben, davon die Rede ist, in sich enthalte. Wenn nun eine Größe gegeben ist, und man soll ein vielfaches derselben suchen; so erhellet, daß überdem eine ganze Zahl müsse gegeben seyn, die es ausdrückt, wie vielmahl jene gegebene Größe in der gesuchten enthalten seyn soll. Wenn die gegebene Größe eine Zahl wäre: so würde die andre ganze Zahl ausdrücken, wie oft man jene niederschreiben müste, wenn man das verlangte Vielfache derselben, vermittelst der Addition suchen wolte. Aber dies würde bey großen Zahlen eine überaus beschwerliche Sache seyn. Deswegen hat man darauf bedacht seyn müssen, diese Arbeit zu verkürzen. Die Methode nun, nach welcher man das vielfache herausbringt, worin die gegebene Größe so oft enthalten ist, als die Einheit in der gegebenen ganzen Zahl, heist die Multiplication mit dieser ganzen Zahl. Die gegebene Größe, wovon man ein vielfaches machen soll, heist hier das Multiplicandum, die ganze Zahl aber, welche ausdrückt, wie oft man jene Größe nehmen soll, der Multiplicator. Beyde führen auch den gemeinschaftlichen

Nah-

Nahmen Factoren. Das Vielfache selbst, so man durch die Multiplication herausbringt, wird das Product genant.

31 §.

Man hat für diese Rechnungsart ebenfals ein eigenes Zeichen festgesetzt, dessen man sich statt des Worts multiplicirt, auf folgende Art bedienet. Man schreibt gewöhnlich den Multiplicatorem nach dem Multiplicando, und setzt das liegende Creutz (×) oder statt dessen nur einen Punkt (·) zwischen beyde. So ist 3 × 4 oder 3 . 4 so viel als 3 mit 4 multiplicirt. Wenn das Multiplicandum keine Zahl, sondern irgend eine andre Größe ist, oder wenigstens durch ein algemeineres Zeichen, als die gewöhnlichen Ziffern sind, z. E. durch einen Buchstaben ausgedruckt wird: so setzt man den Multiplicator auch wohl voran, ohne sonst ein Zeichen dazwischen zu setzen, z. E. 3 Thaler, 5 Pfund. Soll eine Reihe mehrerer Zahlen, die durch die Addition oder Subtraction mit einander verbunden sind, durch eine gegebene Zahl multiplicirt werden: so schliest man das Multiplicandum in einer Parenthese ein, auf diese Art (3+5+9) × 3, welches eben so viel ist, als 17 × 3. Und wenn beyde Factoren von dieser Art sind: so wird jeder für sich in einer Parenthese eingeschlossen, z. E. (3+5) (7+4) ist so viel, als 8 × 11. und (9−5) (7−2) so viel als 4 × 5.

32 §.

Wenn man gleiche Größen mit gleichen ganzen Zahlen multiplicirt: so sind die Producte gleich groß, weil gleiches zu gleichen addirt gleiche Summen giebt.

Wenn

Wenn man aber ungleiche Größen mit gleichen ganzen Zahlen multiplicirt; so giebt das größere Multiplicandum ein größeres Product, als das kleinere, weil das Größere zum Größern addirt, eine größere Summe giebt, als das Kleinere zum Kleinern addirt geben kan (25 §.).

33 §.

Wenn beyde Factoren ganze Zahlen sind; so geben sie einerley Product, man mag die erste mit der zweyten, oder die zweyte mit der ersten multipliciren.

Beweis. Man gehe einmahl von der gewöhnlichen Art, die Zahlen durch Ziffern zu bezeichnen ab, und bezeichne sie mit so vielen bey einander hingesetzten Strichen, als die Zahl Einheiten enthält, daß also z. E. 5 so geschrieben würde: IIIII. Man schreibe das Multiplicandum, auf diese Art ausgedrückt, so oft unter sich selbst, als der Multiplicator 1 enthält, auf folgende Art:

A IIIII B
IIIII
IIIII
C. IIIII

so ist die Summe aller dieser Striche mit dem Product $5+5+5+5=5\times 4$ einerley. Man hat nemlich die Reihe von A nach B so oft genommen, als die Reihe von A nach C eins enthält. Aber wenn man die Reihe von A nach C so oft nimt, als in der Reihe von A nach B die 1 stehet, so bekömt man eben dieselbe Menge, die sich nun so ausdrücken läst: $4+4+4+4+4=4\times 5$. Es ist klar, daß es hier-

gar

gar nicht darauf ankomme, wie viele 1 in der Reihe von A nach B stehen, oder wie oft diese Reihe unter sich selbst hingeschrieben sey. Wenn demnach die Anzahl der 1 in der Reihe von A nach B durch den Buchstab n, und die Anzahl der 1 von A nach C herunter, durch den Buchstab m angedeutet wird; so mögen der Einheiten in n und m so viel seyn, als da wollen, und es wird doch immer dieselbe Menge sowohl durch $n \times m$, als auch durch $m \times n$ ausgedrückt werden können. Also ist überhaupt $n \times m = m \times n$, wenn n und m ganze Zahlen sind.

34 §.

Wenn demnach auch mehr, als zwey ganze Zahlen in einander zu multipliciren sind: so ist es ebenfals einerley, in welcher Ordnung man die Multiplication vornimt. So ist $2 \times 4 \times 7 = 4 \times 2 \times 7 = 4 \times 7 \times 2 = 7 \times 4 \times 2$. Denn da man die Stelle eines jeden Factors mit der Stelle des nachfolgenden oder vorhergehenden verwechseln kan: so kan jeder in die Stelle eines jeden der übrigen kommen.

35 §.

Wenn man gleiche Größen mit ungleichen ganzen Zahlen multiplicirt; so giebt der größere Multiplicator ein größeres Product, als der kleinere. Denn wenn von zweyen gleichen Größen die eine mehrmahl zu sich selbst addirt wird, als die andre; so muß ohne Zweifel die erste Summe größer seyn, als die zweyte.

Wenn demnach von zwoen ungleichen Größen die größere mit einer größeren ganzen Zahl multiplicirt wird, als die kleinere: so ist

noch um so mehr das erste Product grösser, als das zweyte.

36 §.

Es sind zwo durch einfache Ziffern ausgedrückte Zahlen gegeben, man soll eine durch die andere multipliciren.

Aufl. Man schreibe das Multiplicandum so oft unter sich selbst, als der Multiplicator eins enthält, und suche die Summe nach dem 24 §.: so ist diese Summe mit dem Product beyder Zahlen in einander einerley. Es dienet einigermassen zur Verkürzung der Rechnung, wenn man die gröste von den beyden Zahlen für das Multiplicandum nimt, da es einerley ist, welche von beyden dafür gehalten wird (33 §). Allein dies Verfahren würde doch in der Folge zu weitläuftig seyn, also ist es am besten, ein für allemahl alle mögliche Producte zu suchen, die herauskommen können, wenn die Factoren einfache Ziffern sind, und diese Producte etwa in eine Tabelle zu bringen, daraus man sie jedes mahl leicht herausnehmen kann. Diese Tabelle ergiebt sich von selbst, wenn man die Ziffern von 1 bis 9 nach einander hinschreibt, und darunter ihre dupla setzt, die man erhält, wenn man jede zu sich selbst addirt. Unter diesen duplis setzt man die tripla, indem man jede Zahl zu ihrem duplo addirt, und unter diesen wieder die Quadrupla, indem man jede Zahl zu ihrem triplo addirt, u. s. f. bis man auf die noncupla komt. So entsteht folgende Tabelle, die man der Bequemlichkeit halber in Fächer eintheilen kann, so daß jedes Product sein eignes Fach bekomt. Auf die Art wird der eine Factor dieses Products, grade über demselben in der obersten Reihe, der andre aber linker Hand im Anfange

fange derselben Reihe stehen, in welcher die Zahl selbst befindlich ist.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Wenn man nun z. E. das Product 8 × 6 finden soll: so suche man den einen Factor 8 in der obersten Reihe, und den andern Factor 6 unter den ersten Ziffern jeder Reihe linker Hand auf, gehe sodann von der 8 gerade herunter bis auf die sechste Reihe, und von der 6 gegen die Rechte zu fort, bis man in das Fach komt, wo beyde Reihen zusammen treffen. Die Zahl 48, welche in diesem Fache stehet, ist das gesuchte Product.

So muß man wenigstens so lange verfahren, bis man diese Producte durch öftere Uebung im Rechnen von selbst im Gedächtniß behält, oder sich wenigstens die Sache so geläufig gemacht hat, daß man diese Summe leicht, so wie die Summe des 22 §. in Gedanken finden kan. Diese Tafel ist übrigens mit dem Ein mahl eins einerley. Sie heist auch von dem Erfinder der Pythagorische Rechentisch, (abacus Pythagoricus.)

37 §.

Eine Zahl wird mit 10 multiplicirt, wenn man zur Rechten eine Nulle anhängt. Man multiplicirt eben diese Zahl mit 100 durch Hinzusetzung zweyer, mit 1000 durch Hinzusetzung dreyer Nullen, u. s. f. (16 §.) Also ist z. E. 40 so viel, als 4×10, $400 = 4 \times 100$, $4000 = 4 \times 1000$, u. s. f. Diesem nach ist $7000 \times 4 = 7 \times 1000 \times 4 = 7 \times 4 \times 1000$ (§. 34) $= 28000$, und $7000 \times 400 = 7 \times 1000 \times 4 \times 100 = 2800000$ (34 §.) Hieraus folgt die Regel:

Wenn die Factoren einfache Ziffern mit angehängten Nullen sind: so multiplicirt man die einfachen Ziffern nach dem 36 §. und hängt an dem Product so viele Nullen, als beyden Factoren zusammen beygefügt waren.

38 §.

Bestehet das Multiplicandum aus mehrern Theilen, und man nimt jeden Theil so oft, als der Multiplicator eins enthält: so ist dies eben so viel, als wenn man das ganze Multiplicandum auf einmahl so oft genommen hätte. Demnach wird die Summe jener einzelnen Producte mit dem letztern ganzen Product einerley seyn. So erhellet, daß $(3+5) \times 4 = 3 \times 4 + 5 \times 4$ seyn müsse. Eben dies läst sich mit gehöriger Veränderung auf den Fall anwenden, wenn das Multiplicandum eine Differenz zwoer Größen ist. In diesem Falle ist das verlangte Product die Differenz der beyden Producte eines jeden einzelnen Theils des Multiplicandi in den Multiplicator. So ist $(5-3) \times 4 = 5 \times 4 - 3 \times 4$, und überhaupt $(A-B) \times n = A \times n - B \times n$. Es sey nemlich

$A-B=D$; so ist $A=B+D$, und $A \times n = B \times n + D \times n$, folglich $A \times n - B \times n = D \times n$ (28 §.) $= (A-B) \times n$, weil $D=A-B$. Es wird also $7854 \times 3 = 7000 \times 3 + 800 \times 3 + 50 \times 3 + 4 \times 3$ seyn, und hieraus ergiebt sich von selbst die Auflösung folgender Aufgabe.

39 §.

Eine zusammengesetzte Ziffer mit einer einfachen zu multipliciren.

Aufl. Man setze den Multiplicator unter dem Multiplicando, wie bey der Addition, und multiplicire nach einander die Ziffern der verschiednen Ordnungen des Multiplicandi mit dem gegebenen Multiplicator, nach den Regeln des 36 und 37 §. Diese einzelnen Producte setze man gehörig untereinander, so daß die Ziffern von einerley Ordnung untereinander kommen. Alle diese einzelnen Producte bringe man zuletzt in eine Summe; so wird diese das gesuchte Product seyn. (38 §.)

7854	A	97423	C
3	B	5	D
12		15	
150		100	
2400		2000	
21000		35000	
		450000	
23562	$A \times B$.	487115	$C \times D$.

Man wird leicht von selbst darauf verfallen, wenn man die beygefügten Exempel ansieht, daß sich hier eben die Verkürzung wie bey der Addition anbringen lasse.

lasse. (24 §.) Statt jedesmahl das einzelne Product ganz nieder zu schreiben, ist nur nöthig, die niedrigste Ziffer in ihrer gehörigen Stelle hinzusetzen; denn die nechsthöhere kan man in mente behalten, und sogleich zum nechstfolgenden Product hinzurechnen: so ergiebt sich die Summe der einzelnen Producte sogleich von selbst. Auf die Art ist das nachstehende Exempel berechnet.

9084269352783 A.
8 B.

726741548222 64 A × B.

40 §.

Wenn an dem einen, oder auch an beyden Factoren Nullen hängen: so ist es nicht nöthig, diese bey der Multiplication selbst, in Betrachtung zu ziehen. Nachdem man aber die Ziffern gehörig in einander multiplicirt hat, setzt man zu dem Product so viele Nullen hinzu, als beyde Factoren zusammen genommen enthalten. Denn so ist z. E. 3450000 × 7000 = 345 × 7 × 10000 × 1000 (37 §.). Also wird die Rechnung so geführt:

3450000
7000

24150000000.

41 §.

Zwey Zahlen in einander zu multipliciren, wenn gleich beyde dnrch zusammengesetzte Ziffern ausgedrückt sind.

Aufl. Man schreibe den Multiplicator unter dem Multiplicando, wie bey der Addition.

Hier-

Hierauf multiplicire man das ganze Multiplicandum zuerst mit der niedrigsten Ziffer des Multiplicators, und schreibe das Product gehörig unter. (39 §.) Eben diese Multiplication wiederhole man mit der nechsthöhern Ziffer des Multiplicators, (40 §) und fahre so fort, bis die Multiplication mit allen Ziffern des Multiplicators geschehen ist, und die einzelnen Producte gehörig untereinander gesetzt sind.

Alle diese einzelne Producte bringe man in eine Summe, so hat man das ganze gesuchte Product (38 §.): und man siehet leicht, wie diese Regeln in dem nachstehenden Exempel angewandt sind.

Die den einzelnen Producten im ersten Exempel nach dem 40 §. beygefügten Nullen läst man der Kürze halber in der Ausübung weg, wie im zweyten Exempel geschehen ist, weil sie die Summen nicht ändern, wenn jedes folgende Product nur gehörig eine Classe weiter gegen die linke Hand eingerückt wird. Es ist noch anzumerken, daß auch hier die Regel des 40 §. gelte, daferne dem einen, oder beyden Factoren Nullen beygefügt sind.

26394	789643254
9362	53073
52788	2368929762
1583640	5527502778
7918200	2368929762
237546000	3948216270
247100628	41908736419542

Im zweyten Exempel steht statt der Ziffer der zweyten Decimal-Ordnung im Multiplicator eine 0. Es ist klar, daß statt des Products, so eine Ziffer dieser

Ordnung in das Multiplicandum multiplicirt geben würde, hier lauter Nullen hingeschrieben werden müsten. Weil diese nun die Summe nicht ändern: so braucht man sie nicht hinzusetzen; sondern man rückt statt dessen nur das Product in die nächst folgende Ziffer des Multiplicators um eine Classe weiter gegen die linke Hand, weil diese Ziffer nun um zwey Ordnungen höher ist, als die vorige war. Folgten mehrere Nullen im Multiplicator nach einander: so kan man sie aus eben dieser Ursache allemahl übergehen, nur muß alsdenn das Product, in die nach den Nullen folgende Ziffer, um so viele Classen gegen die linke Hand gerückt werden, als Nullen nach einander folgen.

Der IV. Abschnitt.

Von der Division mit ganzen Zahlen, und dem Ursprung der Brüche.

42 §.

Man kan das bisherige Verfahren auch umkehren. Es lassen sich wenigstens manche Zahlen in mehr oder weniger gleiche Theile eintheilen, so daß jeder Theil wieder eine ganze Zahl ist. Wenn nun bestimt wird, in wie viele gleiche Theile eine Zahl zu theilen ist: so kan man fragen, wie groß jeder dieser aliquoten Theile werden müsse. So läst sich die Zahl 12 in 2 oder 3, oder 4 gleiche Theile theilen, und

und im ersten Fall erhält man 6, im zweyten 4, im dritten 3, für die Größe eines jeden aliquoten Theils, von 12. Die Wörter: Hälfte, Drittel, Viertel, u. s. f. (subduplum, subtriplum, subquadruplum, &c.) bezeichnen dergleichen aliquote Theile des Ganzen, und drücken es zugleich specieller aus, wie oft ein solcher Theil in dem Ganzen enthalten sey. Man kan jede andre Größe ebenfalls in eine gewisse Menge gleicher Theile eintheilen; und wenn eine ganze Zahl gegeben ist, die es ausdrückt, in wieviele gleiche Theile die Größe eingetheilt werden soll; so heist das Verfahren, vermittelst dessen man die Größe herausbringt, welche in der gegebenen Größe so oft enthalten ist, als die gleichfalls gegebene ganze Zahl ausdrückt, die **Division** der gegebenen Größe durch die ganze Zahl. Die Größe, welche man eintheilen soll, heist das **Dividendum**, die Zahl, welche ausdrückt, in wieviele gleiche Theile jenes zu theilen ist, der **Divisor**, und der aliquote Theil des **Dividendi**, welchen man eigentlich sucht, wird der **Quotient** genannt. Diese Division wird durch zwey übereinander stehende Punkte (:) bezeichnet, die man zwischen dem Dividendo und Divisor setzt. Auf solche Art wird der Ausdruck $8:2=4$ bedeuten, daß 8 dividirt durch 2 den Quotienten 4 gebe. Wenn eine ganze Reihe mehrerer Zahlen, die durch die Addition oder Subtraction mit einander verbunden sind, durch eine gegebene Zahl zu dividiren ist: so schliest man das Dividendum in einer Parenthese ein, auf folgende Art: $(7+3+6):4$, welcher Ausdruck eben so viel bedeutet: als $16:4$. Wenn der Divisor ein Ausdruck von eben der Art ist; so wird er ebenfalls

in einer Parenthese eingeschlossen, z. E. (6+4+8):(2+4), ist so viel als 18:6.

43 §.

Die Multiplication und Division sind wie die Addition und Subtraction einander so entgegen gesetzte Rechnungsarten, daß eine die andre aufhebt. Es ist offenbar, daß 3 × 2 : 2 = 3, oder 6 : 2 × 2 = 6 sey. Die Hälfte des doppelten Ganzen ist das Ganze selbst, und das halbe Ganze doppelt genommen ist wiederum das Ganze selbst. Ein Drittel des dreyfachen Ganzen ist das Ganze, und das dreyfache von einem Drittel des Ganzen, ist wiederum das Ganze selbst. Ueberhaupt wenn man eine Größe so oft man will, zu sich selbst addirt, und theilt die Summe in eben so viele gleiche Theile, als man Stücke zusammen addirt hatte: so werden diese Theile die summirten Zahlen selbst seyn. Und wenn eine Größe in so viele gleiche Theile, als man will, getheilt ist, und man addirt einen Theil davon so oft zu sich selbst, als man Theile hat: so muß die eingetheilte Größe selbst wieder herauskommen. Dies giebt die algemeine Regel.

Wenn man eine Größe mit einer ganzen Zahl multiplicirt: und das Product mit eben der Zahl wieder dividirt: so erhält man das Multiplicandum wieder. Und wenn man eine Größe mit einer ganzen Zahl dividirt, den Quotienten aber mit dem Divisor wieder multiplicirt: so erhält man das Dividendum wieder.

44 §.

Wenn man gleiche Größen durch gleiche ganze Zahlen dividirt; so sind die Quotienten gleich.

Beweis. Es können die Buchstaben A und B ein Paar gleiche Größen, welche man will, und also auch ein Paar gleiche Zahlen bedeuten, die man beyde mit einerley ganzen Zahl n dividiren soll. Wenn nun $A = B$ ist, so muß $A:n = B:n$ seyn. Denn wäre $A:n \rhd B:n$ so wäre $A \rhd B$ (43. 32 §.), und wenn $A:n \lhd B:n$ wäre: so müste aus eben dem Grunde $A \lhd B$ seyn. Beydes widerspricht der Voraussetzung, daß $A = B$ seyn soll; deswegen ist nothwendig $A:n = B:n$.

45 §.

An diese Sprache der Mathematiker, und die Art sich kurz auszudrücken, wenn sie statt der gewöhnlichen Nahmen, eine Größe überhaupt, oder auch, statt der Ziffern eine Zahl überhaupt, mit Buchstaben des Alphabeths bezeichnen, gewöhnt man sich leicht, ob es gleich den ersten Anfängern einen kleinen Anstoß zu verursachen pfleget. Die Sache hat einmahl den Nutzen, daß der Vortrag dadurch abgekürzt wird, und fürs zweyte auch diesen, daß die Beweise dadurch ihre völlige Allgemeinheit erhalten. Wenn der Satz des vorigen §phs allgemein wahr seyn soll: so muß es gleich viel seyn, was für Größen man statt A und B in dem Beweise setzet, wenn sie nur beyde gleich groß sind. So muß man auch statt n jede beliebige ganze Zahl setzen können. Man hat aber weder so allgemeine Zeichen für die Zahlen, noch auch für andre Größen. Deswegen

muß

muß man entweder neue Zeichen von so allgemeiner Bedeutung einführen, und das ist unnöthig, weil die Buchstaben füglich dazu gebraucht werden können: oder man muß alles in weitläuftige Worte einkleiden, welches viel beschwerlicher seyn würde. Wer diese Art des Vortrages noch nicht gewohnt ist, der setze statt der gebrauchten Buchstaben Zahlen, die ihm zuerst beyfallen, und beobachte dabey nur dies, daß er statt der Buchstaben, die gleiche oder ungleiche Zahlen oder Größen überhaupt bedeuten sollen, auch gleiche, oder ungleiche Zahlen nimt; so wird er ohne Schwierigkeit die Beweise überdenken können, und es bald dahin bringen, daß er dieses Hülfsmittels nicht mehr benöthigt ist.

46 §.

Wenn von zwoen Größen die eine größer als die andre ist, und man dividirt beyde mit gleichen ganzen Zahlen; so ist der erste Quotient größer als der zweyte.

Beweis. Es sey $A > B$, und man dividire beyde mit der ganzen Zahl n. Wäre nun $A:n = B:n$: so müste $A = B$ seyn (32. 43 §.); und wenn $A:n < B:n$ wäre: so folgte daraus, daß $A < B$ wäre (32 §). Also ist nothwendig $A:n > B:n$, weil die beyden andern Fälle wider die Voraussetzung $A > B$ streiten.

47 §.

Wenn zwo Größen gleich sind, und man dividirt die eine mit einer größern ganzen Zahl, als die zweyte; so ist der erste Quotient kleiner, als der letzte.

Beweis.

Beweis. Es sey $A=B$ und $n \succ m$, so daß n und m ein Paar ganze Zahlen sind. Wäre nun $A:n=B:m$: es würde folgen, daß $A \succ B$ sey (35 §.) und wenn $A:n \succ B:m$ wäre: so folgte daraus ebenfalls, daß $A \succ B$ seyn müste (35 §.). Beydes ist der Voraussetzung $A=B$ zuwieder. Also muß $A:n \prec B:m$ seyn.

48 §.

Bestehet das Dividendum aus mehrern Theilen, die durch die Addition verbunden sind; so ist der Quotient die Summe aller einzelnen Quotienten, die man erhält, wenn man jedes Stück des Dividendi mit der gegebnen ganzen Zahl dividirt.

Beweis. Es sey $A+B+C+$ etc. das Dividendum, und der Divisor sey n. Man setze, es werde $A:n+B:n+C:n+$ etc. $=S$: so ist $A+B+C+$ etc. $=S \times n$ (32. 38. 43 §.). Also $(A+B+C+$ etc.$):n=S$ (44 §.) oder $(A+B+C+$ etc.$):n=A:n+B:n+C:n+$ etc.

49 §.

Eben das gilt mit gehöriger Veränderung, wenn das Dividendum eine Differenz zwoer Größen ist. Der Quotient wird sodann die Differenz der beyden einzelnen Quotienten, die man durch die Division der ganzen Zahl in jedes Stück des Dividendi erhält. So ist $(A-B):n=A:n-B:n$. Es sey nemlich $A-B=D$: so ist $A=B+D$, und $A:n=B:n+D:n$ (48 §.) folglich $A:n-B:n=D:n$ (28 §.), oder $A:n-B:n=(A-B):n$.

50 §.

Wenn das Dividendum eine ganze Zahl, und ein vielfaches des Divisors ist; so ist der Divisor im Dividendo so oft enthalten, als die Einheit im Quotienten.

Beweis. Es sey das Dividendum D eine ganze Zahl so wie der Divisor *d*, und Q sey der Quotient: so hat man $D:d=Q$, und folglich $D=Q\times d$ (43 §.). Aber $Q\times d=d\times Q$ (33 §.). Also $D=d\times Q$ (11 §.) und $D:Q=d$. Also ist *d* in D so oft enthalten, als Q die Einheit enthält (42 §.)

51 §.

Dies ist auch umgekehrt wahr: **Wenn eine ganze Zahl ausdrückt, wie oft eine kleinere Zahl in einer größern enthalten sey; so ist sie einerley mit dem Quotienten, den man durch die Division der größern Zahl durch die kleinere findet.**

Beweis. Wenn *n* die Zahl ist, welche ausdrückt, wie oft *d* in D enthalten sey: so ist $D=d\times n$ (30 §.). Weil nun auch $D=d\times Q$ (50 §.): so wird $d\times n=d\times Q$ (11 §.) und $n\times d=Q\times d$ (33 §.) folglich $n=Q$ (44 §.) oder $n=D:d$.

52 §.

Eine größere Zahl durch eine kleinere dividiren heist also auch so viel, als eine dritte Zahl suchen, welche ausdrückt, wie oft die kleinere in der größern enthalten sey. Wenigstens ist dieser Begrif mit dem vorigen des 42 §. einerley, wenn von ganzen Zahlen die Rede ist, und die kleinere Zahl ein aliquoter Theil der größern ist. Man könnte also den Quotienten Q,

wel=

welchen die Division der Zahl D durch *d* giebt, so finden. Man müste *d* von D so oft subtrahiren, als es angeht, und die Zahl bemerken, welche ausdrückt, wie oft dies geschehen könne. Diese Zahl würde der Quotient seyn. Aber, dessen zu geschweigen, daß dies in den meisten Fällen, ein viel zu mühsames Verfahren seyn würde: so setzt es überdem voraus, daß der Divisor kleiner, als das Dividendum, und zugleich ein aliquoter Theil desselben sey. Es kommen aber sehr viele Fälle vor, wo weder das eine, noch das andre statt hat, und diese müssen jetzt genauer erörtert werden.

53 §.

Es sey also zuerst die Einheit selbst das Dividendum, und der Divisor eine ganze Zahl, z. E. 3: so muß der Quotient der dritte Theil der Einheit seyn. Demnach kan der Quotient keine Zahl seyn, die aus der vorigen ganzen Einheit zusammen gesetzt ist. Es sey nun die Zahl 2 das Dividendum, und der Divisor bleibe 3; so muß der Quotient der dritte Theil der Zahl 2 seyn. Diesen dritten Theil erhält man so. Es ist die Zahl $2 = 1+1$. Wenn man nun von jeder Einheit den dritten Theil nimt; so werden beyde Drittheile zusammen genommen, den dritten Theil des Ganzen ausmachen (48 §.). Also beträgt in diesem Falle der Quotient 2 Drittheile des Ganzen, und es ist wiederum offenbar, daß dieser Quotient aus der vorigen Einheit ganz genommen, sich nicht zusammen setzen lasse. Daher kan in solchen Fällen der Quotient keine ganze Zahl seyn. Aber dieser Quotient läst sich auf ähnliche Art aus einem aliquoten Theil der Einheit zusammen setzen, wie

man

man sonst ganze Zahlen aus der ganzen Einheit zusammen setzt. Wollte man demnach diesen aliquoten Theil für sich als ein ganzes betrachten; so könte er als eine neue, von der vorigen unterschiedene Einheit angesehen werden. Und insoferne wäre auch der Quotient als eine ganze Zahl anzusehen, nur daß hier die zusammengezehlten Einheiten von den vorigen unterschieden seyn würden. Sieht man aber die zusammengezehlten Stücke, als Theile des vorigen Ganzen an: so wird der Quotient eine Menge gleicher Theile dieses Ganzen ausdrücken, und in dieser Absicht ein Bruch seyn (4 §.)

54 §.

Man könte also in Fällen von dieser Art so verfahren: Es müste durch ein besonderes Wort z. E. Hälfte, Drittel, Viertel, u. s. f. der aliquote Theil der Einheit angedeutet werden, welcher in dem Bruch etliche mahl enthalten ist: und so könte man durch eine vorangesetzte Ziffer anzeigen, wie oft derselbe in dem Bruch enthalten sey. Aber man hat es bequemer gefunden, statt dieser Wörter folgendes Zeichen zu gebrauchen. Man ziehet unter der 1 einen Strich, und setzt unter demselben die Ziffer, welche andeutet, in wie viele gleiche Theile die Einheit einzutheilen sey, um diesen aliquoten Theil zu erhalten. Auf die Art bedeuten die Ausdrücke $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, u. s. f. eben so viel, als die Wörter Hälfte, Drittel, Viertel, u. s. f. Nun läst sich jeder Bruch, den man aus einem solchen aliquoten Theil der Einheit zusammen setzt, so ausdrücken: Man schreibt statt der 1 über dem Strich die Ziffer, welche ausdrückt, wie oft dieser aliquote Theil des Ganzen zusammen zu zehlen

len seyn. So bedeuten die Ausdrücke: $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, eben so viel als 2 Drittel, 3 Viertel.

55 §.

Von dieser Art die Brüche zu bezeichnen hat man mehr als einen Vortheil. Einmal sind die Ausdrücke kürzer, als wenn man die vorhin angezeigten Worte gebrauchen wollte. Fürs zweyte behalten die Brüche die Natur ungenanter Zahlen, und jeder Bruch läst sich mit einer ganzen Zahl vergleichen, wenn man voraus setzt, daß die Einheit, deren Theile der Bruch zusammenzehlt, einerley sey mit der Einheit, woraus die ganze Zahl zusammen gesetzt ist. Uebrigens erhellet, daß sich jeder Bruch durch zwo ganze Zahlen ausdrücken lasse. Die eine davon zeigt an, in wieviele gleiche Theile die Einheit eingetheilt sey, und sie heist der Nenner des Bruchs: die andre drückt aus, wie oft derjenige aliquote Theil der Einheit, welcher durch diese Theilung herauskomt, in dem Bruch enthalten sey, und man nennt sie den Zehler des Bruchs. Es ist nicht nothwendig, daß der Zehler des Bruchs kleiner, als sein Nenner sey. Man nennt inzwischen diejenigen eigentliche, oder wahre Brüche, deren Zehler kleiner, als der Nenner ist, die übrigen werden uneigentliche Brüche genannt.

56 §.

Jeder Quotient zwoer ganzen Zahlen ineinander ist mit einem Bruch einerley, dessen Zehler das Dividendum und dessen Nenner der Divisor ist.

Beweis. Wenn das Dividendum kleiner, als der Divisor ist: so erhellet die Richtigkeit des Satzes schon aus dem 53 §. Die dortigen Schlüsse lassen sich aber leicht algemeiner machen. Das Dividendum mag so groß seyn, als es wolle, so kan man es allemahl in die einzelnen Einheiten zergliedern, daraus es bestehet. Wenn man nun jede Einheit mit dem Divisor theilt; so werden alle diese Quotienten nicht nur gleich (44 §.), sondern es werden auch lauter aliquote Theile der Einheit. Die Summe aller dieser Quotienten ist der Quotient selbst, den das Dividendum in den Divisor getheilt geben muß. Aber eben diese Summe aller Quotienten ist ein Bruch, dessen Renner ausdrückt, in wieviele aliquote Theile die Einheit getheilt worden; und dies war der Divisor: der Zehler aber, wieviele solcher aliquoten Theile die Summe ausmachen, und eben so viele Einheiten enthielte das Dividendum. Man soll z. E. 5 durch 3 dividiren: so ist $5:3 = 1:3 + 1:3 + 1:3 + 1:3 + 1:3$. Aber $1:3 = \frac{1}{3}$ (53 §.). Also wird $5:3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$.

57 §.

Umgekehrt: Jeder Bruch ist mit einem Quotienten einerley, den der Zehler durch den Renner dividirt, geben muß.

Beweis. Der Renner des Bruchs drückt aus, es soll die Einheit in so viele gleiche Theile getheilt werden, als derselbe eins enthält. So viel mahl nun der Zehler eins enthält, so viele der vorhin genannten Theile machen den Bruch aus. Eben dies erhält man, wenn man jede Einheit des Zehlers mit dem Renner dividirt (53 §.), und alle Quotienten zusammen nimt, deren so viele sind, als Einheiten im

im Zehler. Aber diese Summe ist einerley mit dem Quotienten, den die Division des ganzen Zehlers mit dem Renner, giebt (48 §.). Also ist der Bruch selbst mit diesem Quotienten einerley. Z. E. der Bruch $\frac{5}{3}$ drückt aus, man soll den dritten Theil der Einheit 5 mahl nehmen. Aber der dritte Theil der Einheit ist $= \frac{1}{3} = 1:3$. Also ist $\frac{5}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1:3 + 1:3 + 1:3 + 1:3 + 1:3 = 5:3$.

58 §.

Hieraus folgt eine sehr bequeme Art, die Division zu bezeichnen, der man sich sonst häufig statt der beyden Punkte (:) bedient. Man schreibe nemlich jeden Quotienten wie einen Bruch, dessen Zehler das Dividendum, und dessen Renner der Divisor ist. Ueberhaupt wird man in der Folge Brüche statt Quotienten, und Quotienten statt Brüche setzen können, so lange Dividendum und Divisor, oder Zehler und Renner ganze Zahlen sind, und dieses voraus gesetzt, wird man sich leicht von der Richtigkeit folgender Sätze überzeugen.

Jeder uneigentlicher Bruch ist entweder selbst eine ganze Zahl, wenn nämlich der Nenner dem Zähler gleich, oder ein aliquoter Theil desselben ist, oder er enthält eine ganze Zahl mit einem eigentlichen Bruch. In dem letzten Fall drückt der Quotient, den die Division des Zehlers durch den Nenner giebt, aus, wie oft der ganze Divisor, und überdem ein aliquoter Theil desselben, im Dividendo enthalten sey.

59 §.

Eine ganze Zahl bestehet höchstens aus zwo Ziffern, aber so, daß die höchste Ziffer

kleiner, als 9 ist: man soll sie mit einer einfachen Ziffer dividiren, die kleiner, als jene ist, aber doch gröſſer, als die höchste Ziffer des Dividendi, daferne solches nemlich aus zwoen Ziffern bestehet.

Aufl. I. Wenn das Dividendum unter den Producten im Ein mahl eins vorkomt, und der Divisor ist einer von den beyden Factoren, welche durch die Multiplication dies Dividendum hervorbringen: so ist der Quotient allemahl der andre Factor. Deswegen suche man das Dividendum in der Tabelle des 36 §. in einem solchen Fache auf, wo einer von den beyden Factoren, die dies Product durch die Multiplication hervorbringen, mit dem gegebnen Divisor einerley ist: so wird der andre Factor der gesuchte Quotient seyn (43 §.). Auf solche Art wird 8:4 den Quotienten 2, und 56:7 den Quotienten 8 geben.

Man ist wenigstens so lange genöthigt, diese Tabelle zu gebrauchen, bis man das Einmahl eins sich geläufig gemacht hat. Ist dies geschehen; so darf man nur die Producte des Divisors in die einfachen Ziffern, in Gedanken durchlaufen; so wird man bald auf das gegebene Dividendum kommen, und dann ist der Quotient diejenige Zahl, die durch die Multiplication in den Divisor, das Dividendum hervorbringt.

II. Komt das Dividendum unter den Producten im Ein mahl eins nicht vor, oder, wenn dies gleich wäre, giebt es keinen unter den beyden Factoren desselben, der mit dem Divisor einerley wäre; so nehme man das nechst kleinere Product, welches obige Eigenschaften hat, und dividire es nach der vori-

gen

gen Regel, addire aber zum Quotienten einen Bruch, dessen Zehler der Ueberschuß des gegebenen Dividendi über das dividirte Product, und dessen Nenner der Divisor ist (48. 56 §.). Soll man also z. E. 79 durch 8 dividiren: so wird die Rechnung am bequemsten so geführt: Man schreibt das Dividendum 79 nieder, und unter demselben den Divisor 8; ziehet aber keinen Strich unter diesen Zahlen, wie bey den übrigen Rechnungsarten; sondern zur Seiten, damit man den Quotienten auf der andern Seite des Strichs setzen könne, welches hier bequemer ist. Nun findet sich, daß 9 mahl 8 zwar nur 72, aber 10 mahl 8 schon 80 giebt, deswegen ist 9 ein Theil des Quotienten. Diesen setzt man an der obgedachten Stelle hin, und multiplicirt den Divisor 8 in den Quotienten 9. Das Product 72 schreibt man unter den gegebenen Zahlen gehörig unter, und subtrahirt es vom Dividendo, so bleibt 7 zum Rest, also komt zum Quotienten der Bruch $\frac{7}{8}$ hinzu, daß man demnach den Quotienten eigentlich so schreiben müste: $9+\frac{7}{8}$. Aber man ist gewohnt, hier das Zeichen + wegzulassen, und den Bruch unmittelbar anzuhängen.

79	$9\frac{7}{8}$
8	
72	
7	

89	$9\frac{8}{9}$
9	
81	
8	

Auf eben die Art findet man, daß 89 durch 9 dividirt, den Quotienten $9\frac{8}{9}$ giebt. In dem Fall, wenn kein Rest bleibt, pflegte man sich so auszudrücken: Der Divisor gehe im Dividendo auf.

60 §.

Wenn die gegebenen Zahlen noch Ziffern von eben der Art sind, wie im vorigen §., dem Dividendo aber Nullen beygefügt sind: so findet man den Quotienten auf folgende Art. Ohne die Nullen anfangs in Betrachtung zu ziehen, dividirt man die Ziffern in einander, wie im vorigen §. Dafern nun der Divisor im Dividendo aufgeht, und also der gefundne Quotient eine ganze Zahl, ohne angehängten Bruch ist: so hängt man an demselben so viele Nullen, als dem Dividendo beygefügt waren. Auf diese Art wird 24000:6 = 4000. Denn es sey 24000:6 = Q: so ist 24000 = Q × 6 (44.43 §.). Aber auch 24000 = 4000 × 6 (37 §.). Also Q × 6 = 4000 × 6 (11 §.), und Q = 4000 (43.44 §.) d.i. 24000:6. = 4000. Dieser Beweis ist an die bestimte Größe der Zahlen gar nicht gebunden, und also algemein.

61 §.

Wenn in eben dem Fall des vorigen §. der Divisor im Dividendo nicht aufgeht: so kan man ebenfalls ohne Rücksicht auf die Nullen, den Theil des Quotienten, welcher eine ganze Zahl wird, nach der II Regel des 59 §. suchen. Diesem fügt man so viele Nullen bey, als am Dividendo hängen. Hierauf multiplicirt man denselben in den Divisor, und subtrahirt das Product vom Dividendo, da denn der Rest noch ebenfalls mit eben demselben Divisore dividirt werden muß. Es soll z. E. 270 durch 6 dividirt werden: so giebt in der beygefügten Berechnung die erste Division 40, und läst zum Rest 30, also müste zum Quotienten 40 noch

270	40
6	5
240	45
30	
6	
30	
0	

noch der Bruch $\frac{30}{6}$ hinzukommen. Dividirt man aber 30 nochmahl durch 6: so erhält man 5 zum Quotienten, und es gehet alles auf. Addirt man nun beyde gefundene Theile: so wird der ganze Quotient 45. Man kan sich leicht davon überzeugen, daß auf diese Art der Quotient allemahl richtig gefunden werde, weil nemlich $270-240=30$ herauskömt: so ist $270=240+30$ und $270:6=240:6+30:6=40+5=45$.

62 §.

Wenn das Dividendum und der Divisor durch einerley ganze Zahl multiplicirt, oder dividirt werden: so ändert das den Quotienten nicht.

Beweis. Es sey $\frac{D}{d}=Q$: so wird $D=Q\times d$ (43 §.). Folglich auch $D\times n=Q\times d\times n$, wenn n eine ganze Zahl ist (32 §.), und dieserwegen $\frac{D\times n}{d\times n}=Q=\frac{D}{d}$. Aber eben deswegen ist auch $\frac{(D:n)\times n}{(d:n)\times n}=\frac{D:n}{d:n}$, oder $\frac{D}{d}=\frac{D:n}{d:n}=Q$, weil $(D:n)\times n=D$, und $(d:n)\times n=d$ ist (43 §.)

63 §.

Eine Zahl mit angehängten Nullen, wird durch 10 dividirt, wenn man eine Null weglöscht, durch 100, wenn man 2 Nullen weglöscht: man dividirt sie mit 1000 durch Hinwegstreichung dreyer Nullen, u. s. f. (37. 43 §.) Wenn demnach nicht allein am

Dividendo, sondern auch am Divisore Nullen hängen, und es mit den Ziffern noch übrigens eben die Bewandniß hat, wie im 59 §.; so kan man aus beyden gegebenen Zahlen so viele Nullen weglöschen, als im Divisor vorhanden sind, und so ist dieser Fall auf den vorigen des 60 §. gebracht. Hiebey wird vorausgesetzt, daß im Divisor nicht mehr Nullen als im Dividendo vorhanden sind. Wäre dies: so könnte man aus beyden Zahlen nur so viel weglassen, als das Dividendum enthält, und der Quotient wird sodann allemahl ein eigentlicher Bruch seyn. (z. E. 6700:7000 = 67:70. = $\frac{67}{70}$. Ein Exempel der ersten Art aber wäre, wenn 590000 durch 8000 dividirt werden sollte. Man lasse hier gleich anfangs drey Nullen aus beyden Zahlen weg: so bleiben 590 durch 8 zu dividiren. Nun giebt in der beygefügten Berechnung die erste Division 70, und läst zum Rest 30. Dividirt man diesen Rest nochmahl mit 8: so erhält man zum Quotienten 3, und es bleibt zum Rest 6. Deswegen komt zum letzten Theil des Quotienten noch der Bruch $\frac{6}{8}$ hinzu. Weil man nun leicht wahrnimt, daß Zehler und Renner dieses Bruchs sich durch 2 dividiren lassen: so dividirt man würklich damit, und nimt den Bruch $\frac{3}{4}$ statt $\frac{6}{8}$ (62. 57 §.)

590	70
8	3$\frac{3}{4}$
560	
30	
8	
24	
6	

64 §.

Aus den beyden hier angeführten Stellen erhellet nemlich so viel, daß ein und eben derselbe Bruch sich auf unzehlich viele andere verschiedene Arten ausdrücken lasse, wenn man sei-

nen Zehler und Nenner mit einerley ganzen Zahl multiplicirt, oder dividirt. Aber durch die Division erhält man nicht allemahl ganze Zahlen zu Quotienten, so daß man dadurch auf Brüche kommen kan, deren Zehler und Nenner selbst wieder Brüche, oder ganze Zahlen mit angehängten Brüchen sind. Brüche von dieser Art heissen irreguläre, oder auch wohl gebrochene Brüche, so wie diejenigen, deren Zehler und Nenner ganze Zahlen sind, reguläre Brüche heissen. Wenn es angeht, vermeidet man gerne die gebrochenen Brüche. Allemahl aber, wenn man bey der Division auf Brüche komt, deren Zehler und Nenner sich durch eine und eben dieselbe ganze Zahl, ohne Rest dividiren lassen; so nimt man diese Division würklich vor, wenigstens, wenn sich leicht eine ganze Zahl, die in beyden aufgehet, ergiebet. Auf solche Art erhält man kleinere ganze Zahlen, die eben den Bruch ausdrücken, und dies ist in der Ausübung am bequemsten. Es wird unten eine Regel vorkommen, nach welcher man eine solche Zahl allemahl suchen kan, dafern es mit einer ganzen Zahl angehet.

65 §.

Wenn die höchste Ziffer des Dividendi im 59 §. nicht kleiner, als der Divisor ist; so wird der Quotient auf eine ähnliche Art, wie im 61. 63 §. gefunden. Man setze, es soll die Zahl 89 durch 6 dividirt werden: so giebt es kein grösseres Product des Divisors 6 in eine andre einfache Ziffer, als 54. Also könnte man die Rechnung so führen: Weil $9 \times 6 = 54$ ist, so nehme man 9 für den Quotien-

ten an, und subtrahire das Product 54 vom Dividendo 89; so erhellet, daß der Ueberschuß 35 auch noch durch 6 dividirt werden, und dieser Quotient noch zu dem vorigen hinzukommen müsse. Dieser Quotient ist $5\frac{5}{6}$, welcher mit dem vorigen zusammen $14\frac{5}{6}$ giebt. Man theilt hier eigentlich die Zahl 89 in zwey Stücke, in 54, und 35, und dividirt jedes Stück für sich durch 6. Aber es ist am bequemsten das Dividendum in die Theile zu vertheilen, welche die Ziffern der verschiedenen Ordnungen von selbst ergeben, und das sind hier die Theile 80 und 9. Man schreibe also den Divisor 6 zuerst unter der höchsten Ziffer 8, und nehme an, es sey 80 das Dividendum; so wird der Quotient 10 (61 §.). Das Product $6 \times 10 = 60$ subtrahire man vom ganzen Dividendo, so bleiben 29. Wenn man auch diesen Rest mit 6 dividirt; so erhält man $4\frac{5}{6}$, und also, wie vorhin, $14\frac{5}{6}$ zum ganzen Quotienten. Man hätte hier die o bey der 10 im Quotienten weglassen, und statt derselben gleich den folgenden Theil des Quotienten 4 hinschreiben können. In der That kan man sich bey dieser Theilung des Dividendi in die Stücke, welche die Ziffern verschiedener Ordnungen ausdrücken, einer solchen Verkürzung allemahl bedienen; denn es ist offenbar, daß der folgende Theil des Quotienten durch eine Ziffer, der nechst niedern Ordnung wird ausgedrückt werden. Eben dieser Vortheil läst

89	9
6	$5\frac{5}{6}$
54	$14\frac{5}{6}$
35	
6	
30	
5	

89	10
6	$4\frac{5}{6}$
60	
29	
6	
24	
5	

sich

sich anbringen, wenn auch das Dividendum aus mehr, als zwoen Ziffern bestehet.

66 §.

Das Dividendum ist aus so vielen einfachen Ziffern, als man will, zusammengesetzt, und der Divisor eine einfache Ziffer, man soll den Quotienten finden.

Aufl. I. Man vertheile in Gedanken das Dividendum in diejenigen Theile, welche die Ziffern verschiedener Ordnungen desselben ausdrücken. Ist die erste Ziffer im Dividendo kleiner, als im Divisor; so rechne man zum höchsten Theil zwey Ziffern, im Gegentheil aber nur eine.

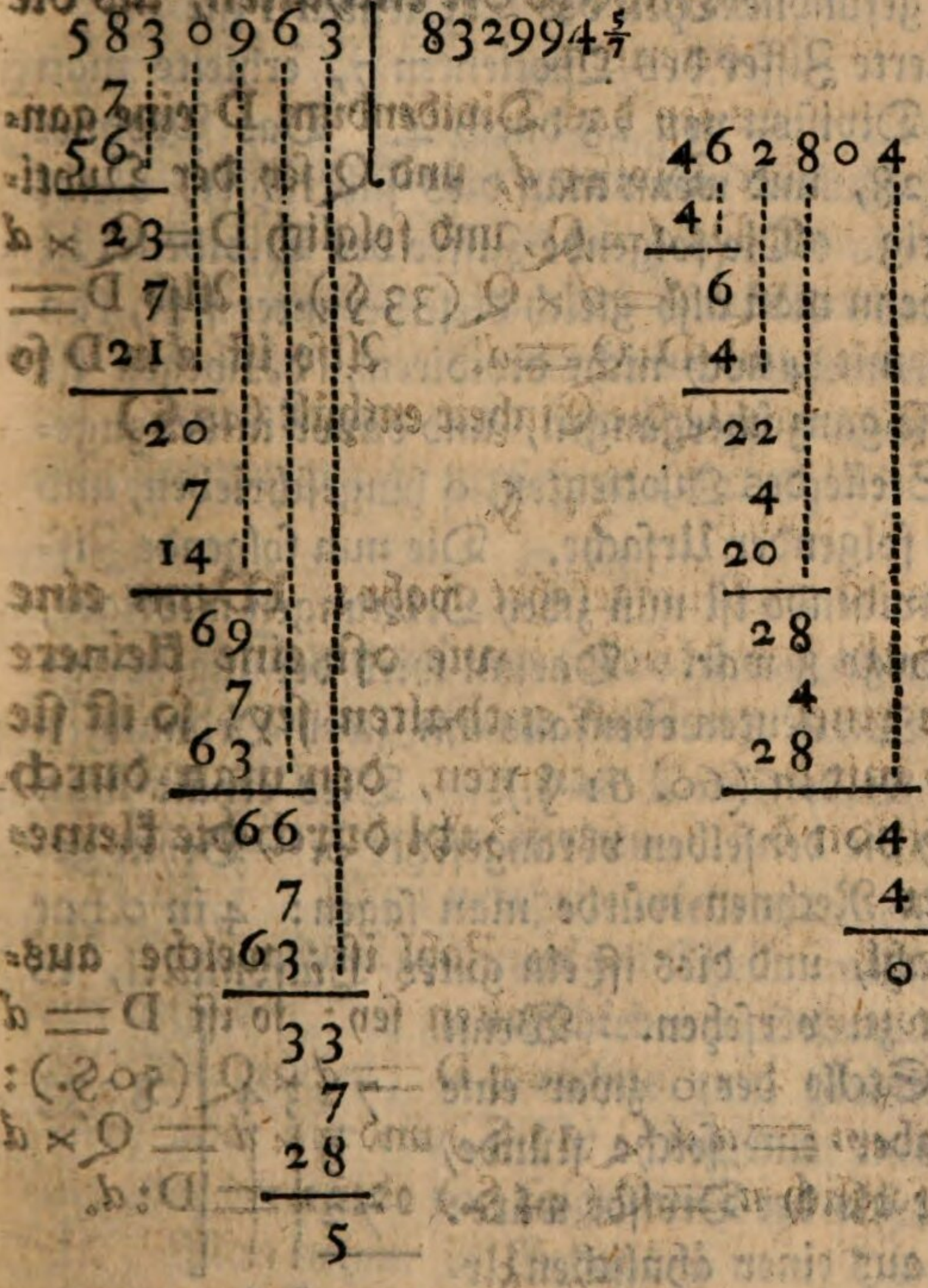
II. Nun verfahre man mit den verschiedenen Stücken des Dividendi nach einander eben so, wie mit den zweenen Theilen des Dividendi im vorigen §. verfahren worden, und zwar so, wie auch am angeführten Ort geschehen, daß man mit dem höchsten Theil anfängt, und auf die nechst niedrigen nach einander fortgeht. Im beygefügten Exempel gehet man so zu Werke 3 in 90000 dividirt giebt 20000. Das Product dieses Quotienten in den Divisor ist 60000. Dies vom ganzen Dividendo abgezogen, läst zum Rest 27642, welcher noch durch 3 zu dividiren ist. Man dividirt also 3 in 27000, weil die erste Ziffer des Dividendi kleiner als 3 ist, so erhält man 9000. Das Product dieses Quotienten in den Divisor ist 27000, welches vom Dividendo abgezogen, den

87642	20000
3	9000
60000	200
27642	10
3	4
27000	29214
642	
3	
600	
42	
3	
30	
12	
3	
12	
0	

den Rest 642 giebt. Nun dividirt man also 600 mit 3, welches 200 giebt, und das Product 600 = 200 × 3 vom Dividendo abgezogen, läst 42. Demnach sind 40 durch 3 zu dividiren, welches 10 giebt, und das Product 10 × 3 abgezogen läst 12. Dieser Rest aufs neue durch 3 dividirt giebt den letzten Theil 4.

Hier fällt nun sogleich in die Augen, daß es nicht nöthig gewesen wäre, die Theile des Quotienten mit den zugehörigen Nullen, untereinander hin zu setzen, und sie zuletzt erst zu addiren. Man kan die Ziffern ohne die Nullen beyzufügen allemahl in einer Reihe bey einander hinsetzen: So würde im Exempel der Quotient 29214 sich sogleich von selbst ergeben haben. Aber auch bey der übrigen Rechnung ist es nicht nöthig, die Nullen den Producten des Divisors in die Theile des Quotienten, beyzufügen, wenn man nur die Ziffern allemahl in der gehörigen Stelle setzt. Denn es fällt in die Augen, daß bey jeder Subtraction mit den Ziffern des Dividendi, unter welchen die Nullen zu stehen kommen, weiter keine Veränderung vorgehe, als daß man sie unter dem gezogenen Strich herunter setzt. Dies kan aber geschehen, ohne daß die Nullen würklich hingeschrieben sind. Ja weil selbst das Abschreiben dieser Ziffern Zeit wegnimt, und man bey jeder folgenden Operation nur die nächst niedrige Ziffer des Dividendi gebraucht; so ist nur nöthig, nachdem das Product des jedesmahl gefundenen Theils vom Quotienten in den Divisor, ohne den dazu gehörigen Nullen, unter den Ziffern des Dividendi von eben der Ordnung hingeschrieben, und von denselben abgezogen worden, die nächst folgende Ziffer des Dividendi herunter,

und rechter Hand, neben dem übrig gebliebenen Rest zu setzen. Bey den nachstehenden Exempeln sind diese Verkürzungen angebracht.



Im zweyten Exempel kommen einige besondre Fälle vor die einige Erläuterung verdienen, weil man bey denselben ohne Noth Umwege nehmen würde, wenn man sich ganz genau an die vorigen Regeln halten wollte. Zuerst giebt 4 durch 4 dividirt, den Quotienten 1. Das Product aus diesem Quotienten in den Divisor, ist auch 4, daher braucht man es nicht nochmahl niederzuschreiben; sondern man kan nur

gleich

gleich den Divisor selbst subtrahiren. Ferner giebt 6 durch 4 dividirt, auch 1, also kan man wie vorhin verfahren, und es überhaupt allemahl so machen, wenn der gefundne Theil des Quotienten 1 ist.

Die vierte Ziffer des Quotienten 7, erhielte man durch die Division von 28 durch 4. Das Product 7 × 4 ist 28, und wenn man dies subtrahirt, bleibt nichts übrig. Die folgende Ziffer des Dividendi ist auch 0, wenn man also gleich diese herunter setzt, kan man doch mit 4 noch nicht dividiren, deswegen ist diese Classe ganz übergangen, und davor in der zugehörigen Stelle des Quotienten, 0 hingeschrieben, und zwar aus folgender Ursache. Die nun folgende Ziffer im Dividendo ist nun zwey Ordnungen niedriger, als die vorige 8 war. Darum wird der zugehörige Theil des Quotienten ebenfalls um zwey Ordnungen niedriger werden (60. 61 §.). Dies erhält man nun durch die denselben vorangesetzte 0. Beym gewöhnlichen Rechnen würde man sagen: 4 in 0 hat man 0 mahl, und dies ist ein gutes Hülfsmittel, es hier nicht zu versehen. Wenn an der Stelle der 0 zwar eine Ziffer, aber eine solche stünde, die kleiner als der Divisor wäre: so würde aus einer ähnlichen Ursache in die zugehörige Stelle des Quotienten eine 0 kommen, wie in dem beygefügten Exempel. Man sagt auch hier: 9 in 3 hat man 0 mahl. Es ist dies eigentlich der Fall, da im übrig gebliebenen Stück des Dividendi die höchste Ziffer des Dividendi kleiner als der Divisor ist, und daher würde sich, wenn man

7234		8037
9		
72		
	34	
	9	
	27	
	7	

völlig

völlig nach der Regel dieses §. verfahren wollte, alles von selbst ergeben. Weil dies aber bequeme practische Verkürzungen sind: so war es nicht undienlich, sie besonders anzumerken.

67 §.

Wenn der Divisor zwar eine einfache Ziffer ist, aber an derselben Nullen hängen, und am Ende des Dividendi befinden sich eben so viele, oder mehrere nach einander; so läst man in beyden so viel weg, als im Divisor stehen, und kan übrigens nach den Regeln des vorigen §. verfahren (62. 63 §.)

68 §.

Das Dividendum sowohl, als der Divisor sind zusammengesetzte Ziffern, jedoch ist der Divisor kleiner, als das Dividendum: man soll den Quotienten finden.

Aufl. I. Man vertheile wiederum in Gedanken das Dividendum in diejenigen Theile, welche die Ziffern desselben, die zu verschiedenen Ordnungen gehören, ausdrücken, und rechne zum höchsten Theil zwey, oder nur eine Ziffer, nachdem entweder der eine oder der andre von folgenden beyden Fällen statt hat. Man nehme in Gedanken vom Dividendo so viele der höchsten Ziffern desselben ab, als der Divisor enthält, und gebe acht, ob jene Ziffern zusammen für sich allein eine Zahl ausmachen, die kleiner ist, als der Divisor. In diesem Fall nemlich rechne man zum höchsten Theil des Dividendi die beyden höchsten Ziffern desselben, im Gegentheil aber nur eine.

II. Man schreibe den Divisor unter dem Dividendo so, daß die höchste Ziffer desselben entweder unter der höchsten Ziffer des Dividendi zu stehen kommt, wenn der letzte, in voriger Regel erwehnte Fall statt hat: oder man setze in dem ersten Fall die höchste Ziffer des Divisors unter der zweyten Ziffer des Dividendi.

III. Nun nehme man an, daß statt aller Ziffern die im Divisor nach der höchsten, und im Dividendo nach derjenigen folgen, unter welcher die höchste Ziffer des Divisors gesetzt ist, Nullen stehen, und suche den Quotienten nach der Regel des 63 §. Diesen Quotienten multiplicire man in den ganzen Divisor, und ziehe das Product vom Dividendo ab.

IV. Diese Regel kan den Quotienten zu groß geben, weil man den Divisor kleiner, als er würklich ist, angenommen hat. Allein in dem Fall wird das nach eben dieser Regel gefundene Product größer, als das Dividendum seyn, und sich nicht abziehen lassen. Deswegen muß man nun die Ziffer des gefundenen Quotienten so lange um eins vermindern, bis das Product so klein wird, daß man es abziehen kan.

V. Den übrig gebliebenen Rest dividirt man wie zuvor, mit eben dem Divisor, und fährt so lange damit fort, bis man auf einen Rest komt, der kleiner, als der Divisor ist: da man denn zu den gefundenen, und in eine Summe gebrachten Theilen des Quotienten noch einen Bruch setzt, dessen Zehler der letzte Rest, und dessen Nenner der Divisor ist.

VI. Dafern übrigens statt einiger der letzten Ziffern in den gegebenen Zahlen Nullen stehen: so löscht man, bevor die Rechnung angefangen wird, in beyden

den so viele weg, bis man in einer von beyden an die niedrigste Ziffer komt (62. 63 §.).

Das beygefügte Exempel ist so berechnet: 2 in 7 dividirt, würde 3 geben, und so erhielte man zum Quotienten 300. Aber das Product $278 \times 300 = 83400$ ist größer als das Dividendum, deswegen nimt man nur 200. Das Product $278 \times 200 = 55600$ vom Dividendo abgezogen, giebt den Rest 23334. Unter diesen schreibt man den Divisorem so, daß seine höchste Ziffer unter der nechst höchsten des Restes komt, weil $233 < 278$ ist, nach der ersten Regel. Nun würde 2 in 23 dividirt, den Quotienten 9 geben,

78934		200
278		80
55600		$3\frac{260}{278}$
23334		$283\frac{260}{278}$
278		
22240		
1094		
278		
834		
260		

er ist aber wegen der vorhin schon vorgekommenen Ursache zu groß, also wird der zweyte Theil des Quotienten 80, das Product 278×80 vom vorigen Rest abgezogen, giebt den neuen Rest 1094. Man schreibt unter denselben den Divisor, wie vorhin, weil $109 < 278$ ist: Ob nun gleich 2 in 10 dividirt den Quotienten 5 geben könte: so darf man ihn hier doch nicht größer, als 3 nehmen, da denn das Product $278 \times 3 = 834$, vom vorigen Rest abgezogen, den letzten Rest 260 giebt, welcher schon kleiner, als der Divisor ist.

Man kan hier alle die practischen Vortheile anbringen, deren im vorigen 65 §. Erwehnung geschehen ist. Einmahl hat man nicht nöthig den Theilen

des Quotienten die ihnen zugehörige Nullen beyzufügen, und diese Theile am Ende allererst in eine Summe zu bringen. Man kan diese Theile nach einander in einer Reihe sogleich hinschreiben, weil der folgende Theil nothwendig allemahl eine Ziffer der nechst niedrigen Ordnung ist. Ferner ist es nicht nothwendig, den Producten des Divisors in die Theile des Quotienten, die ihnen zukommenden Nullen beyzufügen, wenn man nur die Ziffern derselben allemahl gehörig unter diejenigen Ziffern des Dividendi setzt, die mit ihnen zu einerley Ordnung gehören. Weil überdem die Ziffern des Dividendi, unter welchen die Nullen stehen müsten, wenn man sie beyfügen wollte, durch die Subtraction dieser Producte weiter keine Veränderung leiden, als daß man sie unter den gezogenen Strich herunter setzt; und bey jeder folgenden Operation nur die nechst niedrige Ziffer des Dividendi, eine Aenderung leidet: so ist nur nöthig, nachdem die Ziffern des Products von den drüber stehenden Ziffern des Dividendi abgezogen worden, die nechste Ziffer des Dividendi herunter, und rechter Hand neben dem Rest, unter den Strich zu setzen. Auf diese Art ist die Berechnung folgender Exempel verkürzt worden, die man nun leicht nachrechnen wird.

Im ersten von diesen beyden Exempeln bleibt nach der Subtraction des Products aus dem ersten Theil des Quotienten in den Divisor, der Rest 1945. Wenn man hiezu die nechst folgende Ziffer des Dividendi nimt: so hat man die Zahl 19456, und diese ist noch kleiner, als der Divisor. Also muß man noch eine Ziffer zunehmen, und dafür eine o im Quotienten hinzuschreiben, denn der folgende Theil des Quotienten wird nun um zwey Ordnungen niedriger, als der vorige war.

5949826437 | 90295 $\frac{18002}{65893}$

65893
593037

194564
65893
131786

627783
65893
593037

347467
65893
329465

18002

6852330870247 | 10021705 $\frac{98202}{683749}$

683749

1484087
683749
1367498

1165890
683749

482141 2
683749
4786243

3516947
683749
3418745

98202

Im zweyten Exempel ist der erste Rest 1484, welcher nur aus 4 Ziffern bestehet. Da nun der Divisor noch größer bleibt, wenn man gleich zwey der folgenden Ziffern zunimt: so kommen dafür zwey Nullen im Quotienten. Weil man nemlich noch die dritte Ziffer zunehmen muß; so wird der folgende Theil des Quotienten um drey Ordnungen niedriger, als der vorige war. Wenn man ohne practische Verkürzung blos nach den dreyen ersten Regeln dieses §. rechnet, den Theilen des Quotienten die ihnen zugehörigen Nullen beyfügt, und sie, wie es die Regeln der Addition erfordern, untereinander setzt: so fält die Ursache, warum man vorhin beschriebner massen verfahren muß, desto deutlicher in die Augen.

69 §.

Die Division dient der Multiplication zur Probe: denn wenn man das Product durch den einen Factor dividirt; so muß der andre der Quotient werden, widrigenfalls ist bey der Multiplication gewiß ein Fehler vorgegangen, dafern man anders richtig dividirt hat. Umgekehrt dient also auch die Multiplication zur Probe der Division: wenn man den Quotienten, dafern er eine ganze Zahl, ohne angehängten Bruch ist, mit dem Divisor multiplicirt; so muß das Dividendum wieder herauskommen. Geschicht dies nicht, und man ist versichert, daß man richtig multiplicirt habe: so ist gewiß beym dividiren ein Fehler vorgegangen (43 §.). Dafern aber der Quotient einen Bruch bey sich hat; so wird das Product aus dem Divisor in den ganzen Theil des Quotienten das Dividendum, weniger den letzten Rest geben müssen. Wenn man also diesen Rest zu jenem Product addirt:

so muß die Summe das Dividendum seyn. Man hat mancherley andre Methoden, die vier Rechnungsarten zu prüfen, oder bey einem Exempel die sogenannte Probe zu machen; die sich hier aber nicht ohne zu viele Weitläuftigkeit erklären lassen. Verschiedene Eigenschaften der Zahlen, worauf sie sich gründen, werden in der Folge allererst vorkommen, andre aber können hier gar nicht berührt werden.

Uebrigens drückt man gerne, wenn es angehet die herausgebrachten Brüche durch ihre kleinsten Zahlen aus. Wie man sich dabey zu verhalten habe, werden folgende Lehren zeigen.

Der V. Abschnitt.

Von dem Unterscheid der Prim-Zahlen, und zusammen gesetzten Zahlen.

70 §.

Wenn eine ganze Zahl A durch eine andre ganze Zahl *n* sich ohne daß ein Rest bleibt theilen läst: so sagt man: *n* **messe** A, (*n* metitur A) oder A sey durch *n* **theilbar.** Man redet der Kürze wegen so, damit man nicht allemahl den Zusatz, ohne Rest, beyzufügen nöthig habe. Wenn bey den folgenden Untersuchungen von Zahlen die Rede seyn wird, davon die eine durch die andre theilbar, oder nicht theilbar ist: so werden allemahl ganze Zahlen verstanden werden.

71 §.

Wenn zwey ganze Zahlen durch eine dritte ohne Rest theilbar sind: so ist ihre Summe sowohl, als auch ihre Differenz, durch eben die Zahl theilbar.

Beweis. Es sollen die beyden ganzen Zahlen A und B durch die dritte n theilbar seyn; so, daß $\frac{A}{n}$ und $\frac{B}{n}$ ganze Zahlen sind: so erhellet, daß auch $\frac{A}{n} + \frac{B}{n}$ sowohl, als $\frac{A}{n} - \frac{B}{n}$, wenn $B < A$ ist, eine ganze Zahl sey, weil die Summe sowohl, als die Differenz zwoer ganzen Zahlen gewiß eine ganze Zahl ist. Aber $\frac{A+B}{n} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n}$ (48 §.). Also ist auch $\frac{A+B}{n}$ eine ganze Zahl; und weil $\frac{A-B}{n} = \frac{A}{n} - \frac{B}{n}$ (49 §): so ist ebenfals $\frac{A-B}{n}$ eine ganze Zahl.

72 §.

Wenn von zwoen Zahlen, A und B, zwar die eine A durch eine dritte Zahl n theilbar ist, aber die andre B ist durch eben diese dritte Zahl n nicht theilbar: so ist auch jener Summe $A+B$ oder ihre Differenz $A-B$ durch diese dritte Zahl n nicht theilbar.

Beweis. Wäre $\frac{A+B}{n}$ eine ganze Zahl; so

müste

müste auch $\frac{A+B}{n} - \frac{A}{n} = \frac{B}{n}$ (49 §.) eine ganze Zahl seyn (71 §.), welches der Voraussetzung entgegen ist. Wäre $\frac{A-B}{n}$ eine ganze Zahl, so wäre vermöge des erwiesenen $\frac{A-B}{n} + \frac{B}{n} = \frac{A}{n}$ keine ganze Zahl, welches auch mit der Voraussetzung streitet.

73 §.

Wenn $A+B$ sowohl, als auch A durch n theilbar ist: so muß auch B durch n theilbar seyn.

Beweis: Denn wäre B nicht durch n theilbar: so wäre auch A+B nicht durch n theilbar (72 §.), wider die Voraussetzung.

74 §.

Wenn A und B jede für sich durch n nicht theilbar sind: so wird $A+B$ durch n theilbar seyn, wenn die Summe der Reste, welche die Division $A:n$ und $B:n$ geben, dem Divisor n gleich ist, widrigenfalls wird $A+B$ durch n nicht theilbar seyn. Ferner wird auch $A-B$ durch n theilbar seyn, wenn jene Reste gleich sind: widrigenfalls wird $A-B$ durch n nicht theilbar seyn.

Beweis I. Es gebe $\frac{A}{n}$ den ganzen Quotien-

ten Q und lasse den Rest R; eben so gebe $\frac{B}{n}$ den Quotienten q und lasse den Rest r. So ist $A = Q \times n + R$, und $B = q \times n + r$; also $A + B = Q \times n + q \times n + R + r = (Q + q) \times n + R + r$. Wenn nun $R + r = n$; so ist diese Summe durch n theilbar (71 §.). Wenn aber $R + r$ nicht $= n$, so ist doch $R < n$ und $r < n$, also $R + r < 2n$ (25 §.) Demnach wird diese Sumine durch n nicht theilbar seyn (72 §).

II. Weil ferner $A - B = (Q - q) \times n + R - r$: so ist $A - B$ durch n theilbar, wenn $R - r = 0$, oder $R = r$ ist. Dafern nun $R > r$ ist, so wird $R - r < R$ und also durch n nicht theilbar, folglich auch $A - B$ durch n nicht theilbar seyn (72 §.). Wenn $r > R$ ist, so wird $r - R < r$, und $r < n$, also $r - R < n$, folglich $(r - R)$ durch n nicht theilbar seyn. Es sey $r - R = k$: so ist $A - B = (Q - q) \times n - k$. Aber $(Q - q) \times n$ ist durch n theilbar, und k durch n nicht theilbar; demnach ist auch $(Q - q) \times n - k$ oder $A - B$ nicht durch n theilbar (72 §.)

75 §.

Wenn mehr, als zwo Zahlen A, B, C, u. s. f. durch n theilbar sind: so ist auch ihre Summe durch n theilbar: Wenn sie aber nicht alle durch n theilbar sind; so ist ihre Summe nur alsdenn durch n theilbar, wenn die Summe der Reste, welche die Divisionen von A, B, C, u. s. w. durch n geben, durch n theilbar ist.

Beweis. Der erste Satz läst sich eben so, wie der erste Satz des 71 §. beweisen. Der zweyte Satz erhellet aus folgenden Gründen. Wenn Q, q, R, r, eben das, wie im vorigen §. bedeuten: und C

durch

durch n dividirt den ganzen Quotienten K giebt, und k zum Rest läst, so hat man

$$A = Q \times n + R$$
$$B = q \times n + r$$
$$C = K \times n + k.$$

Also $A+B+C = (Q+q+K) \times n + R + r + k$. Ist also $R+r+k$ durch n theilbar: so ist es auch $A+B+C$ (71 §.), und wenn dies nicht ist: so ist auch $A+B+C$ nicht durch n theilbar (72 §.)

Wenn C, c, $\mathfrak{C}$ die Complemente (19 §.) von R, r, k zu n sind; so ist $R+C+r+c+k+\mathfrak{C}$ durch n theilbar. Wenn demnach die Summe der Complemente $C+c+\mathfrak{C}$ durch n theilbar ist: so muß es auch die Summe der Reste (73 §.), folglich auch die Summe $A+B+C$ durch n theilbar seyn.

Wäre $C+c+\mathfrak{C}$ durch n untheilbar: so müste auch $R+r+k$ durch n untheilbar seyn; denn wäre diese Summe durch n theilbar: so wäre $R+C+r+c+k+\mathfrak{C}$ durch n untheilbar (72 §.), welches nicht seyn kan. Ist also $C+c+\mathfrak{C}$ durch n untheilbar, so ist auch $A+B+C$ nicht durch n theilbar.

76 §.

Wenn ein Factor A des Products $A \times B$ durch eine Zahl n theilbar ist: so ist auch das Product $A \times B$ durch n theilbar.

Beweis. Das Product $A \times B$ ist die Summe so vieler A, als B eins enthält (30 §.) Wenn also jedes A durch n theilbar ist: so ist es auch $A \times B$. (75 §.)

77 §.

Wenn kein Factor des Products $A \times B$ durch n theilbar ist, sondern A dividirt durch

n, läst den Rest R, und B dividirt durch n, läst den Rest r: so ist $A \times B$ durch n nur alsdenn theilbar, wenn $R \times r$ durch n theilbar ist.

Beweis. Es ist vermöge der Voraussetzung $A = Q \times n + R$ und $B = q \times n + r$, wenn die ganzen Theile der Quotienten Q und q sind. Also $A \times B = Q \times n \times q \times n + R \times q \times n + Q \times n \times r + R \times r$ (38 §.). Also ist $A \times B$ durch n nur alsdenn theilbar, wenn $R \times r$ durch n theilbar ist (71. 72 §.)

78 §.

Wenn zwo, oder mehr Zahlen A, B, C, D, u. s. f. durch eine und eben dieselbe Zahl n theilbar sind; so heist n das gemeinschaftliche Maaß der Zahlen A, B, C, D, u. s. f. Solche Zahlen, die kein andres gemeinschaftliches Maaß, als die Einheit haben, werden unter sich einfache Zahlen (numeri inter se primi) genannt. Ueberhaupt aber heist eine Zahl, die durch keine andre als die Einheit theilbar ist, eine einfache, oder Primzahl (numerus primus) Und wenn ein Product aus solchen Primzahlen durch die Multiplication entstanden ist: so heissen diese Primzahlen die einfachen Factoren des Products, da denn alle andre Factoren eines Products, wenn sie sich noch in einfache zerfällen lassen, zusammengesetzte Factoren genannt werden.

79 §.

Zahlen, die durch 2 theilbar sind, heissen grade Zahlen, die übrigen, welche durch 2 getheilt 1 zum Rest lassen, nennt man ungrade Zahlen. Die Zahl 2 ist eine grade Zahl, und zugleich eine Primzahl (78 §.). Alle übrige Primzahlen, sind ungra-

de

de Zahlen, denn jede grade Zahl, 2 ausgenommen, hat wenigstens den Factor 2. Es giebt auch viele ungrade Zahlen, die keine Primzahlen sind, zum E. 9, 15, u. s. f. Daher gilt der Satz nicht umgekehrt. Jede grade Zahl läst sich durch $2m$, und jede ungrade Zahl durch $2m+1$ ausdrücken, was auch m für eine ganze Zahl bedeute, und hieraus schliest man leicht folgende Sätze.

I. Die Summe sowohl, als die Differenz zwoer graden nicht nur, sondern auch zwoer ungraden Zahlen, ist eine grade Zahl (71. 74 §.), so wie die Summe und Differenz einer graden und ungraden Zahl, eine ungrade ist (72 §.)

II. Das Product zwoer graden Zahlen sowohl, als auch das Product einer graden Zahl in eine ungrade, ist eine grade Zahl (76 §.). Aber das Product zwoer ungraden Zahlen in einander, ist eine ungrade Zahl (77 §.)

80 §.

Wenn zwo Zahlen A und B ungleich sind, und die grösere A ist durch die kleinere B theilbar: so ist die kleinere B das gröste gemeinschaftliche Maaß beyder Zahlen A und B.

Dieser Satz ist für sich klar.

Wenn aber A durch B nicht theilbar ist: so kan das gröste gemeinschaftliche Maaß beyder Zahlen nicht grösser seyn, als der Rest R, den die Division von A durch B übrig läst.

Beweis. Es sey Q der ganze Quotient, den A durch B dividirt giebt; so ist $A = Q \times B + R$. Wenn nun B durch die Zahl n theilbar ist; so ist auch $Q \times B$ durch n theilbar (76 §.). Also kan A nicht durch n theil-

theilbar seyn, wenn R nicht durch n theilbar ist (72 §.), und deswegen kan n nicht größer, als R seyn, wenn A sowohl als B dadurch theilbar sind.

81 §.

Wenn B durch R theilbar ist; so ist R das gröste gemeinschaftliche Maaß der Zahlen A und B.

Beweis. Weil $A = Q \times B + R$: so folgt die Richtigkeit des Satzes aus dem 71. 76 und 80 §., denn R ist durch sich selbst theilbar

82 §.

Wenn B durch R nicht theilbar ist: so ist das gröste gemeinschaftliche Maaß von B und R auch zugleich das gröste gemeinschaftliche Maaß von A und B.

Beweis. Es sey n das gröste gemeinschaftliche Maaß von B und R, und man setze, A und B hätten das Maaß m, so daß $m > n$ wäre: so müste auch m ein Maaß von $Q \times B$ seyn (76 §.); folglich auch von R (73 §.); folglich hätten B und R ein gemeinschaftliches Maaß, das größer wäre, als n, wider die Voraussetzung.

83 §.

Wenn B durch $B - R$ theilbar ist: so ist auch A durch $B - R$ theilbar.

Beweis. Weil $A = Q \times B + R$: so addire man $B - R$ auf beyden Seiten, und es wird $A + B - R = Q \times B + B$. Ist nun B durch $B - R$ theilbar: so ist auch $B - R$ ein Maaß von $Q \times B + B$ (76. 71 §.). Also von $A + B - R$, also auch von A (73 §.)

84 §.

84 §.

Wenn R nicht selbst das gröste gemeinschaftliche Maaß von A und B ist; so kan dasselbe nicht gröser, als $B-R$ seyn.

Beweis. Es sey n das gröste gemeinschaftliche Maaß von A und B; so ist auch n ein Maaß von $Q \times B+B$ (76. 71 §.); folglich von $A+B-R$, und da n auch ein Maaß von A seyn soll: so ist es auch ein Maaß von $B-R$ (73 §.); also kan n nicht gröser, als $B-R$ seyn.

85 §.

Es sind zwo ungleiche Zahlen gegeben, man soll ihr grösstes gemeinschaftliches Maaß suchen.

Aufl. I. Man dividire die gröseere Zahl durch die kleinere. Wenn alles aufgeht, so ist die kleinere selbst das gröste gemeinschaftliche Maaß (80 §.) z. E. man hat die Zahlen 12 und 36: so geht 12 in 36 auf, also ist 12 das gröste gemeinschaftliche Maaß von 12 und 36.

II. Wenn die kleinere Zahl in der gröseern nicht aufgeht: so dividire man die kleinere Zahl mit dem Rest. Geht nun alles auf; so ist dieser Rest das gesuchte gröste Maaß (81 §.). Z. E. man hat die Zahlen 12 und 28, wo 28 durch 12 dividirt, den Rest 4 läst, da nun 4 in 12 aufgeht: so ist 4 das gesuchte Maaß.

III. Wenn der Rest in der kleinern Zahl nicht aufgeht: so kan das gesuchte Maaß nicht gröser seyn, als die Differenz dieses Restes von der kleinern Zahl, oder welches einerley ist, das Complement dieses Restes zur kleinern Zahl (84 §.). Wenn demnach dieser

ser Rest größer, als die Hälfte der kleinern Zahl ist: so subtrahire man ihn von der kleinern Zahl, und dividire die kleinere Zahl mit der gefundenen Differenz. Wenn alles aufgehet: so ist diese Differenz das gesuchte Maaß (83 §.). Z. E. man hat die Zahlen 12 und 32, wo 32 durch 12 dividirt, den Rest 8 läst. Dieser ist größer, als die Hälfte von 12, also subtrahire man ihn: so wird die Differenz 4, aber 4 in 12 gehet auf, also ist 4 das gesuchte Maaß.

Man hätte eben dieses Maaß auch so finden können. Weil 8 in 12 nicht aufgeht; so ist das gröste gemeinschaftliche Maaß von 8 und 12 zugleich das gröste Maaß von 32 und 12 nach der I. und II. Regel. Weil nun 8 in 12 dividirt, zum Rest 4 läst, und 4 in 8 aufgeht: so ist 4 das gesuchte Maaß. Aber, daß der Versuch der Division von 12 durch 8 vergeblich seyn würde, konnte man zum voraus wissen.

Hieraus folgt nun die gewöhnliche algemeine Regel:

Man dividire die gröste Zahl durch die kleinste. Bleibt ein Rest; so dividire man damit den vorigen Divisor; bleibt wieder ein Rest; so dividire man damit abermahl den letzten Divisor, und fahre so fort, bis alles aufgeht: so wird der letzte Divisor das gesuchte gemeinschaftliche Maaß seyn.

Diese Regel giebt gewiß richtig das gesuchte Maaß, aber man kan oft einige Divisionen ersparen, wenn man nach der III. Regel nicht mit dem Rest, dafern er größer, als die Hälfte des letzten Divisors ist; sondern mit seiner Ergänzung zum letzten Divisor aufs neue dividirt. Es sollen z. E.

28829 und 104775 die gegebenen Zahlen seyn.

104775	3
28829	
86487	
18288	
10541 Compl.	

Die erste Division giebt den Rest 18288, und man sieht leicht, daß derselbe größer, als die Hälfte von 28829 sey. Deswegen dividirt man mit dem Complement 10541 in den vorigen Divisor; so bleibt der Rest 7747, der abermahl grösser, als die Hälfte des Divisors ist. Die abermahlige Division durch sein Complement 2794 giebt 2159 zum Rest, und sein Complement ist 635.

28829	2
10541	
21082	
7747	
2794 Compl.	

10541	3
2794	
8382	
2159	
635 Compl.	

Die neue Division durch dies Complement läst 254 zum Rest. Weil dieser Rest kleiner, als die Hälfte vom letzten Divisor 635 ist; so dividirt man mit diesem Rest selbst in den letzten Divisor, und es bleibt zum Rest 127. Dieser ist grade die Hälfte von 254. Demnach ist 127 das gesuchte gemeinschaftliche Maaß.

2794	4
635	
2540	
254	

635	2
254	
508	
127	

Wenn bey diesem Verfahren einmahl 1 zum Rest komt: so ist es ein Beweis, daß die gegebenen Zahlen kein andres gemeinschaftliches Maaß, als die Einheit haben, und also Primzahlen unter sich sind (78 §.)

86 §.

86 §.

Wenn man zwo Zahlen durch ihr gemeinschaftliches gröstes Maaß dividirt: so sind die Quotienten Primzahlen unter sich.

Beweis. Es sey m das gröste gemeinschaftliche Maaß der Zahlen A und B und $\frac{A}{m} = Q$, $\frac{B}{m} = q$: so ist $A = Q \times m$ und $B = q \times m$. Wäre nun Q und q keine Primzahlen unter sich; so müsten sie noch ein andres gemeines Maaß n haben. Es sey demnach $\frac{Q}{n} = K$ und $\frac{q}{n} = k$: so wäre $Q = K \times n$, und $q = k \times n$. Also $A = K \times n \times m$ und $B = k \times n \times m$. Also hätten A und B das gemeine Maaß $n \times m$, welches gröser, als m ist, wieder die Voraussetzung.

87 §.

Wenn ein paar Producte zweener Factoren $a \times \beta$ und $\alpha \times b$ gleich groß sind; so giebt jeder Factor des einen Products, durch einen Factor des andern dividirt, einen eben so großen Bruch $\frac{a}{b}$, als der Bruch $\frac{\alpha}{\beta}$ ist, der durch die Division der übrigen beyden Factoren in umgekehrter Ordnung gefunden wird.

Auch umgekehrt: wenn ein Bruch $\frac{a}{b}$ einem andern Bruch $\frac{\alpha}{\beta}$ gleich ist; so sind die Producte, $a \times \beta$ und $\alpha \times b$, eines jeden Zehlers

lers in den Nenner des andern Bruchs gleich groß: und es müssen beydes Zehler und Nenner des einen Bruchs $\frac{a}{b}$ entweder größer, oder eben so groß, oder kleiner, als Zehler und Nenner des andern Bruchs seyn.

Beweis. I. Es ist vermöge des 64 §. $\frac{a \times \beta}{b \times \beta} = \frac{a}{b}$, und $\frac{a \times b}{\beta \times b} = \frac{a}{\beta}$. Nun wird vorausgesetzt, daß $a \times \beta = \alpha \times b$ sey, und es ist $b \times \beta = \beta \times b$ (33 §.) folglich $\frac{a \times \beta}{b \times \beta} = \frac{\alpha \times b}{\beta \times b}$, (44 §.) also auch $\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta}$ (11 §.). Es folgt auf eben die Art, daß $\frac{a \times \beta}{\alpha \times \beta} = \frac{\alpha \times b}{\alpha \times \beta}$ (44 §.) also $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta}$ sey (64 §.).

II. Wenn $\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta}$ ist, so wird $\frac{a \times \beta}{b \times \beta} = \frac{\alpha \times b}{\beta \times b}$ (64 §.) also $a \times \beta = \alpha \times b$ (32 §.). Wenn nun $a > \alpha$ ist; so kan weder $b = \beta$, noch $b < \beta$ seyn, weil sonst $a \times \beta > \alpha \times b$ wäre. Dafern aber $a < \alpha$ ist; so kan weder $b = \beta$, noch $b > \beta$ seyn, weil sonst $a \times \beta < \alpha \times b$ seyn müste. Also muß im ersten Fall $b > \beta$ und im zweyten Fall $b < \beta$ seyn.

Wäre $a = \alpha$, so folgte aus dem 44 §., daß $b = \beta$ seyn müste.

88 §.

Wenn ein Bruch $\frac{a}{b}$ einem andern durch gröfsere Zahlen ausgedrückter Bruch $\frac{A}{B}$ gleich ist; so müssen die Quotienten des gröfsern Zehlers durch den kleinern, und des gröfsern Nenners durch den kleinern dividirt gleiche Zahlen seyn.

Und dafern der Bruch $\frac{a}{b}$ nicht mehr durch kleinere Zahlen ausgedrückt werden kan; so müssen die Quotienten auch ganze Zahlen seyn.

Beweis I. Weil $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$ seyn soll, so folgt aus dem II. Satz des 87 §., daß $A \times b = a \times B$ sey: also wird nach dem ersten Satz auch $\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$.

II. Wären nun a und b die kleinsten Zahlen, wodurch sich der Bruch $\frac{a}{b}$ ausdrücken läst, die Quotienten $\frac{A}{a}$ und $\frac{B}{b}$ aber keine ganze Zahlen; so müste A durch a dividirt einen Rest R, und B durch b dividirt einen Rest r lassen. Wenn demnach Q und q die ganzen Theile der Quotienten sind, so wäre

$\frac{A}{a}$

$\frac{A}{a} = Q + \frac{R}{a}$ und $\frac{B}{b} = q + \frac{r}{b}$. Es ist aber $\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$ vermöge des ersten Satzes. Also muß $Q + \frac{R}{a} = q + \frac{r}{b}$ seyn. Da nun $\frac{R}{a}$ und $\frac{r}{b}$ eigentliche Brüche sind, weil $R < a$ und $r < b$, so kan die Gleichheit nicht bestehen; dafern nicht $Q = q$ ist. Denn da Q und q ganze Zahlen sind, so ist auch ihre Differenz, dafern sie ungleich sind, eine ganze Zahl. Man setze also, es wäre d ihre Differenz und $Q = q + d$: so müste $q + d + \frac{R}{a} = q + \frac{r}{b}$ seyn. Aber es ist nothwendig $d > \frac{r}{b}$, also noch um so mehr, $d + \frac{R}{a} > \frac{r}{b}$, folglich $q + d + \frac{R}{a} > q + \frac{r}{b}$ (25 §.), welches mit dem vorigen nicht bestehen kan. Demnach muß $d = 0$, oder $Q = q$ seyn. Also ist auch $\frac{R}{a} = \frac{r}{b}$ (28 §.), und folglich vermöge des ersten Satzes $\frac{R}{r} = \frac{a}{b}$. Also läst sich der Bruch $\frac{a}{b}$ noch durch kleinere Zahlen ausdrücken, welches der Voraussetzung entgegen ist.

89 §.

Wenn die Zahlen, wodurch ein Bruch $\frac{a}{b}$

ausgedrückt ist, Primzahlen unter sich sind; so läst er sich nicht durch kleinere Zahlen ausdrücken.

Beweis. Wenn a und b noch nicht die kleinsten Zahlen sind, die den Bruch $\frac{a}{b}$ ausdrücken können; so setze man, daß α und β diese kleinsten Zahlen seyn, so daß $\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta}$ ist. Aber nun wird $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta}$ einer ganzen Zahl $n = \frac{b}{\beta}$ seyn (87 §.), und also wäre $a = n\alpha$ und $b = n\beta$. Demnach hätten a und b noch ein gemeinschaftliches Maaß n, und wären keine Primzahlen, unter sich, welches der Voraussetzung entgegen ist.

90 §.

Einen Bruch, ohne seine Größe zu ändern, durch seine kleinsten Zahlen auszudrücken.

Aufl. Man suche das gröste gemeinschaftliche Maaß des Zehlers und Nenners, und dividire beyde mit demselben: so werden die Quotienten die kleinsten Zahlen seyn, wodurch sich der Bruch ausdrücken läst (64. 86. 88 §.).

91 §.

Wenn die Factoren des Products $a \times b$ Primzahlen sind: so läst sich eben das Product nicht durch zwo andre Primzahlen ausdrücken.

Beweis.

Beweis. Wenn α und β ein Paar andre Primzahlen sind, und $a \times b = \alpha \times \beta$ seyn soll: so ist auch $\frac{a}{\beta} = \frac{\alpha}{b}$ (87 §.). Wäre nun $a > \alpha$: so wäre auch $\beta > b$ (87 §.). Also der Bruch $\frac{a}{\beta}$, der schon durch Primzahlen ausgedrückt, welches dem 89 § entgegen ist. Wäre $a < \alpha$: so müste $\beta < b$ seyn (87 §.). Aber auch α und b sind Primzahlen, folglich kan dies aus dem vorigen Grunde ebenfalls nicht bestehen. Demnach muß $a = \alpha$ und folglich $b = \beta$ seyn.

92 §.

Eben das Product $a \times b$ läst sich auch nicht durch mehr, als zwo andre von a und b unterschiedene Primzahlen ausdrücken.

Beweis. Es sey $a \times b = \alpha \times B$, und B ein Product sovieler Primzahlen β, γ, δ, als man will: so folgt eben so, wie vorhin, daß $\frac{a}{B} = \frac{\alpha}{b}$ seyn müsse. Wäre nun $a > \alpha$: so wäre auch $B > b$ (87 §.) und $\frac{a}{\alpha} = \frac{B}{b}$ eine ganze Zahl (88 §.), welches wiederum nicht angehet, weil a eine Primzahl ist. Wäre $a < \alpha$; so würde auch $B < b$ (87 §.) und $\frac{\alpha}{a} = \frac{b}{B}$ eine ganze Zahl seyn (88 §.), welches wiederum nicht seyn kan, weil sowol α als b

Primzahlen seyn sollen. Deswegen muß $a = \alpha$ folglich $b = B$ seyn. Also kan B keine zusammengesetzte Zahl seyn, weil b keine ist. Es muß vielmehr B eine Primzahl, und der Zahl b gleich seyn.

93 §.

Ein Product $a \times b$ zweyer Primzahlen läst sich durch keine dritte, die von den beyden Factoren unterschieden ist, ohne Rest dividiren. Denn wäre $\frac{a \times b}{\alpha}$ eine ganze Zahl n; so wäre $a \times b = \alpha \times n$, so gegen den 91. und 92 §. streitet. Ist demnach $\frac{a \times b}{\alpha}$ eine ganze Zahl; so ist entweder $\alpha = a$ oder $\alpha = b$. Sollten die beyden Sätze des 91. und 92 §. algemeiner seyn, und für Producte gelten, die aus mehr, denn zwenen einfachen Factoren bestehen: so würde diese Folge auch algemeiner seyn. Kan das Product $a\ b\ c\ -\ -\ f\ g$ nicht aus einer gleichen, oder größern Anzahl einfacher, von den vorigen unterschiedener Factoren $\alpha\ \beta\ \gamma\ -\ -\ \zeta\ \eta$ zusammengesetzt seyn: so kan $\frac{a\ b\ c\ -\ -\ f\ g}{\alpha}$ keine ganze Zahl seyn, und wenn dieser Quotient eine ganze Zahl ist: so ist nothwendig entweder $\alpha = a$ oder $\alpha = b$, oder $\alpha = c$ u. s. f

94 §.

Ein Product, das aus mehr als zwoen Primzahlen zusammengesetzt ist, kan ebenfalls nicht aus einer gleichen, oder grösern Anzahl

von den vorigen unterschiedener Primzahlen zusammen gesetzt werden.

Beweis. Es sey $a \times b \times c = \alpha \times \beta \times \gamma$: so ist $\frac{a \times b}{\beta \times \gamma} = \frac{\alpha}{c}$ (87. §.). Nun muß nothwendig $a \times b \trianglerighteq \alpha$, und also $\beta \times \gamma \trianglerighteq c$ seyn (89 §.). Demnach ist $\frac{a \times b}{\alpha}$ eine ganze Zahl (88 §.). Folglich entweder $a = \alpha$ (93 §.), und so ist $b \times c = \beta \times \gamma$, und also auch $b = \beta$, $c = \gamma$ (91 §.) oder $\alpha = b$, und so ist $a \times c = \beta \times \gamma$, also $a = \beta$, $c = \gamma$ (91 §.)

Wenn gleich γ kein einfacher Factor wäre; sondern statt desselben Anfangs ein zusammengesetzter Factor C wäre angenommen worden; so würde doch diese Voraussetzung nicht bestehen können, sondern wie im 92 §. $C = c$ seyn müssen. Auf ähnliche Art erhellet, wenn der Satz für eine gewisse Anzahl von Factoren gilt, daß er noch wahr seyn müsse, wenn ein Factor mehr vorhanden ist. Es sey nemlich $a\,b\,c\,-\,-\,f\,g = \alpha\,\beta\,\gamma\,-\,-\,\zeta\,\eta$ und die Anzahl der Factoren in diesen Producten sey $= n + 1$: so muß $\frac{a\,b\,c\,-\,-\,f}{\beta\,\gamma\,-\,-\,\zeta\,\eta} = \frac{\alpha}{f}$ seyn. Nun darf man nicht $\alpha \trianglerighteq a\,b\,c\,-\,-\,f$ seyn (89 §.). Also muß $a\,b\,c\,-\,-\,f \trianglerighteq \alpha$ und $\frac{a\,b\,c\,-\,-\,f}{\alpha}$ eine ganze Zahl seyn (88 §).

Gilt nun der Satz, wenn die Anzahl der Factoren $= n$ ist; so muß α einem von den Factoren des Zehlers gleich seyn (93 §.). Es sey $\alpha = a$: so ist $b\,c\,-\,-\,f\,g = \beta\,\gamma\,-\,-\,\zeta\,\eta$. Da nun in diesen beyden

Producten die Anzahl der Factoren $= n$ ist, so sind die Factoren in beyden einerley, folglich sind auch die Factoren in den beyden ersten Producten einerley, wo ihre Anzahl $= n + 1$ ist. Man mag aber $a =$ b, oder $= c$, u. s. w. setzen: so folgt eben dasselbe. Weil nun der Satz für zwene Factoren richtig ist: so gilt er auch für drey, wie auch besonders erwiesen ist, folglich auch für vier, also für fünf, u. s. f. für jede Anzahl derselben.

95 §.

Es ist demnach auch der Satz des 93 §. algemein richtig. Ein Product aus einer gewissen Anzahl einfacher Factoren, läst sich durch keine, von diesen Factoren verschiedene einfache Zahl, ohne Rest dividiren: und wenn der Quotient eine ganze Zahl seyn soll; so muß der einfache Divisor nothwendig mit einem der Factoren des Products einerley seyn. Eben so wenig kan der Quotient $\frac{a.b.c.d.}{a.\beta.}$ eine ganze Zahl seyn, wenn die einfachen Factoren des Divisors von den Factoren des Dividendi unterschieden sind. Wäre $\frac{a.b.c.d.}{a.\beta.} = N$, und N eine ganze Zahl: so wäre auch $a.b.c.d = a.\beta.N$, also liesse sich $a.b.c.d.$ sowohl durch a, als durch β ohne Rest theilen, so dem erwiesenen zuwider ist.

96 §.

Dieserwegen können auch zwo Zahlen $A = a.b.c.---f.g$ und $B = a.\beta.\gamma.---\delta.\eta.\vartheta.$ kein gemein-

meinschaftliches Maaß haben, wenn kein einfacher Factor der einen mit einem Factor der andern einerley ist. Dafern sie aber einige gemeinschaftliche einfache Factoren haben: so ist ihr gröstes gemeinschaftliches Maaß das Product dieser gemeinschaftlichen Factoren. Dies gilt nun auch von mehr, als zwoen Zahlen A, B, C, D, diese werden unter sich Primzahlen seyn, dafern sie keinen einfachen Factor mit einander gemein haben. Wenn aber einer, oder mehr einfache Factoren, diesen Zahlen gemein sind: so ist der gemeinschaftliche Factor, oder das Product derselben, wenn mehr vorhanden sind, das gröste gemeinschaftliche Maaß dieser Zahlen.

97 §.

Es sind mehr, als zwo Zahlen A, B, C, D, gegeben, man soll ihr gröstes gemeinschaftliches Maaß suchen.

Aufl. I. Man suche zuerst das gröste gemeinschaftliche Maaß zwoer A und B, dies sey $\alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot \gamma_1 \cdot \delta$. Wenn nun C mit A und B ein gemeinschaftliches Maaß hat: so muß es ein Factor, oder ein ein Product einiger Factoren seyn, welches C mit A und B gemein hat. Da nun alle Factoren, die A und B gemein haben, in $\alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot \gamma_1 \cdot \delta_1$ vorkommen: so muß dieser Factor, oder daferne es mehr sind; so müssen diese Factoren, auch in $\alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot \gamma_1 \cdot \delta_1$ vorkommen. Deswegen suche man abermahl das gröste gemeine Maaß, von $\alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot \gamma_1 \cdot \delta_1$ und C. Dies wird auch das gröste Maaß von A, B und C seyn. Ist dies nun α, β, γ; so erhellet, daß hier alle Factoren vorkommen müssen, die A, B, C, gemein haben. Wenn demnach auch D mit A, B, C ein

gemeines Maaß hat: so muß es ein Factor, oder Product solcher Factoren seyn, die in A, B, C zugleich, folglich auch in dem Product α, β, γ vorkommen. Also suche man wiederum das gröste gemeine Maaß von α, β, γ und D: so ist dies zugleich das gröste gemeine Maaß von A, B, C und D. Man sieht leicht, daß dies Verfahren sich allemahl anbringen lasse, es mögen so viele Zahlen, als man will, gegeben seyn.

II. Wenn die gegebenen Zahlen so beschaffen sind, daß sie sich leicht in ihre einfache Factoren zerfällen, oder wie man zu reden gewohnt ist, zerstreuen lassen; so ist die Sache am geschwindesten geschehen, wenn man sie durch ihre einfache Factoren würklich ausdrückt. Auf die Art ergeben sich die einfachen Factoren von selbst, die sie mit einander gemein haben, und deren Product das gröste gesuchte Maaß abgiebt. So sieht man z. E. leicht, daß die Zahlen 63, 42, 84, sich so ausdrücken lassen, $7 \times 3 \times 3$, $2 \times 3 \times 7$, $2 \times 3 \times 7 \times 2$, und also ist $3 \times 7 = 21$, ihr gröstes gemeines Maaß.

98 §.

Aus den bisherigen Lehren liesse sich eine Menge nützlicher Folgen herleiten, und es könnte damit leicht eine ziemlich weitläuftige Beschreibung vieler merkwürdiger Eigenschaften der Zahlen verbunden werden, die sich aus dem Gesetz, nach welchem man die Ziffern zusammen setzt (15 §.), ohne Schwierigkeit ergeben.

Es gründen sich darauf allerhand practische Vortheile, der man sich bedienen kän, wenn man die gemeinen Maaße zwoer, oder auch mehrer Zahlen

sucht,

sucht, ja selbst allerhand Vortheile, bey den vier Rechnungsarten, das gesuchte Resultat durch kürzere Wege, als nach den theoretischen Regeln zu finden, auch die oben im 69 §. erwehnten Proben zu machen. Allein es gehet nicht wohl an, dies alles in den ersten Anfangsgründen auszuführen, wenn das Lehrbuch zu Akademischen Vorlesungen dienen soll, die in so kurzer Zeit geendiget werden müssen. Anfänger, die in den bisherigen Lehren wohl geübt sind, können die vorhin erwehnten weitern Anwendungen derselben sich leicht aus solchen Schriftstellern bekannt machen, welche die Rechenkunst vollständiger abhandeln, als hier geschehen kan. Unter mehrern andern ist des Herrn von Clausbergs demonstrativische Rechenkunst in dieser Absicht vorzüglich anzupreisen. Man trift daselbst im andern Theil eine vollständige Ausführung der bisherigen Lehren nebst ihren Anwendungen an. Auch hat der Herr von Segner im II. Abschnitt seiner Vorlesungen über die Rechenkunst und Geometrie, 65=69 §. die hieher gehörigen Lehren zum Theil weitläuftig ausgeführet.

Der VI. Abschnitt.

Von den vier Rechnungsarten mit Brüchen.

99 §.

Es sind zweene oder auch mehrere Brüche gegeben, deren Nenner verschieden sind; man soll diese Brüche so verändern, daß sie alle gleiche Nenner bekommen, ohne die Größe der Brüche selbst zu ändern, oder wie man in der Rechenkunst zu reden gewohnt ist: man soll alle auf einerley Benennung bringen.

Aufl. Dieser Aufgabe kan auf mancherley Art ein Genüge geschehen. Ueberhaupt zu sagen, komt es nur darauf an, eine Zahl zu suchen, die sich durch jeden der gegebenen Nenner ohne Rest dividiren läst. Hätte man die beyden Brüche $\frac{7}{12}$ und $\frac{5}{8}$: so läst sich die Zahl 72 sowohl durch 12, als durch 8 theilen. Wenn man nun mit dem Quotienten, welchen die Theilung eines jeden Nenners in die Zahl 96 giebt, auch den zu diesem Nenner gehörigen Zehler multiplicirt: so erhält man statt der vorigen zwene andre ihnen gleiche Brüche, die beyde den Nenner 72 haben. So wird $72:12=6$ und $72:8=9$. Also $72=12\times 6$ und $72=8\times 9$, ferner $\frac{7}{12}=\frac{7\times 6}{12\times 6}=\frac{42}{72}$, und $\frac{5}{8}=\frac{5\times 9}{8\times 9}=\frac{45}{72}$ (64 §.). Aber man hätte hier auch eine kleinere Zahl für den gemei-

gemeinen Nenner erwehlen, und eben das erhalten können. Es ist in der Ausübung allemahl am bequemsten, die Brüche durch so kleine Zahlen auszudrücken, als die übrigen Umstände zulassen. Deswegen sucht man auch hier so kleine Zahlen für die Brüche zu erhalten, als bey gleichen Nennern angehet.

Ohne Zweifel wird in jedem Fall das Product aller Nenner in einander eine solche Zahl seyn, die durch jeden Nenner theilbar ist, wie im vorigen Fall die Zahl $12 \times 8 = 96$ seyn würde. Daß aber oft eine kleinere Zahl eben die Eigenschaft habe, beweist schon das vorige Exempel. Deswegen komt es nur darauf an, die Umstände zu kennen, unter welchen eine kleinere Zahl zu erhalten ist, und diese Zahl so klein zu nehmen, als es diese Umstände verstatten. Wollte man diese Bequemlichkeit nicht in Betrachtung ziehen, welche man bey kleinern Zahlen erhält; so könnte man in allen Fällen bey zwenen Brüchen das Product beyder Nenner in einander für den gemeinen Nenner behalten: und so würde eines jeden Bruchs Zehler und Nenner mit dem Nenner des andern zu multipliciren seyn. Dies ist auch würklich die gemeine Regel. Auf die Art würde

$\frac{7}{12} = \frac{7 \times 8}{12 \times 8} = \frac{56}{96}$ und $\frac{5}{8} = \frac{5 \times 12}{8 \times 12} = \frac{60}{96}$,

wo beyde neue Brüche den Nenner 96 haben.

Wenn aber die beyden Nenner ein gemeines Maaß haben; so kan man allemahl mit einem kleinern Nennner eben das erhalten. Wenn $\frac{A}{B}$ und $\frac{C}{D}$

$\frac{C}{D}$ die gegebenen Brüche sind, und es haben die Nenner das gröste gemeine Maaß *m*: so erhellet, daß in dem Product beyder Nenner die Zahl *m* zweymahl als ein Factor vorkommen müsse. Es wird nemlich $B = mP$ und $D = mQ$, wenn P und Q die Quotienten $B:m$ und $D:m$ bedeuten. Also hat man $B \times D = m\,P.m.Q$. Läst man aus diesem Product den Factor *m* einmahl weg: so behält das Product *m*.P.Q dennoch die Eigenschaft, daß es durch $B = mP$, sowohl, als auch durch $D = mQ$ theilbar ist. Aber dies ist nun auch die kleinste Zahl, welche diese Eigenschaft haben kan, weil P und Q schon unter sich Primzahlen sind. Hierauf gründet sich nun folgende Regel, bey zweenen Brüchen den kleinsten gemeinen Nenner zu finden.

Man schreibe die Nenner, nachdem man ihr gröstes gemeines Maaß nach dem 85 §. gesucht hat, bey einander hin, dividire sie mit dem gefundnen Maaß, und schreibe die Quotienten darunter: so wird das Product des gebrauchten Maaßes und der beyden Quotienten in einander, der gesuchte kleinste gemeine Nenner seyn.

Wenn man nun die neuen Brüche selbst sucht: so ist es am bequemsten, die Rechnung so zu führen. Man schreibt die Brüche untereinander, und macht zur Seite zwo Columnen. Oben, über der ersten setzt man den gefundenen gemeinen Nenner, und in dieser Columne neben jeden Bruch den Quotienten seines Nenners in den gemeinen Nenner. In der zweyten Columne schreibt man denn die Producte

dieser

dieser Quotienten in die Zehler der zugehörigen Brüche: so werden dies die neuen Zehler seyn. Auf die Art sind folgende Exempel berechnet.

gegebener Nenner $\frac{7}{12}$ $\frac{5}{8}$ — 12 8
gemeines Maaß 4)
Quot. 3 2
gemeiner Nenner = 4 × 3 × 2 = 24

	24	
$\frac{7}{12}$	2	14
$\frac{5}{8}$	3	15

* * *

gegeb. Nenner 8 4
gemein. Maaß 4)
Quot. 2 1
gem. Nenner = 4 × 2 = 8

	8	
$\frac{5}{8}$	1	5
$\frac{3}{4}$	2	6

* * *

gegeb. Nenner 12 9
gem. Maaß 3)
Quot. 4 3
gem. Nenner = 3 × 4 × 3 = 36.

	36	
$\frac{5}{12}$	3	15
$\frac{2}{9}$	4	8

Man siehet hieraus leicht, daß man das Product beyder Nenner zum gemeinen Nenner behalten müsse, wenn diese Nenner Primzahlen unter sich sind.

Es ist nun nicht schwer, die Anwendung hievon auch auf die Fälle zu machen, wenn mehr als zwene Brüche auf einerley Benennung gebracht werden sollen. Man hat wiederum eine Zahl zu suchen, die durch jeden gegebenen Nenner theilbar ist. Wenn

diese gefunden worden, so kan man sie zum gemeinen Nenner annehmen, und mit jedem Bruch wie vorhin umgehen. Ohne Zweifel ist das Product aller Nenner in einander so beschaffen: aber oft hat eine kleinere Zahl eben die Eigenschaft, und dies allemahl, wenn alle Nenner, oder wenigstens einige ein gemeines Maaß haben. Wenn $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$, $\frac{E}{F}$ die gegebenen Brüche sind; so setze man m sey der Nenner, B, D, F gröstes gemeines Maaß. Es sey B: $m = P$, D: $m = Q$, F: $m = R$, folglich $B = mP$, $D = mQ$, $F = mR$; so fält in die Augen, daß m in dem Product aller Nenner so vielmahl, als ein Factor vorkommen werde, als Nenner da sind, im gegenwärtigen Fall dreymahl. Es ist nemlich $B.D.F = m.P.m.Q.m.R$. Aber es kan der Factor m zweymahl wegbleiben: wenn er nur einmahl da ist; so wird doch das Product $m.P.Q.R$ noch durch $B = mP$, durch $D = mQ$, durch $F = mR$ theilbar seyn. Nochmehr: alle drey Quotienten P, Q, R werden nun zwar kein gemeines Maaß mehr haben können, weil m ihr gröstes ist: aber ihrer zwene allein, z. E. P und Q könnten noch wohl ein gemeines Maaß μ haben. Es sey also $P = \mu.p$, $Q = \mu.q$: so ist $B = m.\mu.p$, $D = m.\mu q$, $F = mR$, und das Product $m.P.Q.R = m.\mu.p.\mu.q.R$. Aus diesem Product kan auch μ einmahl wegbleiben, und es bleibt noch durch $B = m.\mu.p$, durch $D = m.\mu.q$, durch $F = mR$ theilbar. Also kan man das Product $m.\mu.p.q.R$ für den gemeinen Nenner nehmen, welches sich nun auch nicht kleiner machen läst. Hätten B, D, F, kein gemeines Maaß, wohl aber B und D,

so

so daß B = *m*P, D = *m*Q; so erhellet, daß aus dem Product B. D. F = *m*. P. *m*. Q. R der Factor *m* auch jetzt noch einmahl wegbleiben kan, und daß *m*. P. Q. R der kleinste gemeine Nenner sey, den man nehmen kan.

Diese Betrachtungen, welche hier der Kürze wegen nur auf drey Nenner angewandt sind, lassen sich sehr leicht auf so viele Nenner, als man will, anwenden, und man kan daraus folgende Regeln ziehen, in jedem Fall den kleinsten General-Nenner zu finden.

I. Man schreibe die Nenner alle nach einander hin. Haben sie alle ein gemeines Maaß: so dividire man sie damit, und setze die Quotienten darunter. Dafern sie nicht alle ein gemeines Maaß haben; so dividire man mit dem Maaße, so die meisten gemein haben, setze die Quotienten, und zugleich die Zahlen, welche nicht haben dividirt werden können, ungeändert wieder bey einander hin.

II. Mit diesen Quotienten, und ungeänderten Zahlen gehe man wie vorhin um. Man dividire mit dem Maaße, welches die meisten gemein haben, und lasse die Zahlen ungeändert, die sich damit nicht theilen lassen. Die solcher Gestalt gebrauchten Maaße werden jederzeit bey der Seite bemerket.

III. Wenn man nun auf solche Zahlen gekommen ist, worunter keine weiter ein gemeines Maaß haben: so multiplicire man alle zuletzt herausgebrachte Zahlen, und alle gebrauchte Maaße in einander. Das Product wird der gesuchte kleinste general-Nenner seyn. Folgende Exempeln werden diese Regeln erläutern:

Bayerische Staatsbibliothek München

252

$\frac{1}{6}\frac{3}{3}$	4	52
$\frac{9}{4}\frac{}{2}$	6	54
$\frac{1}{8}\frac{1}{4}$	3	33

63 42 84

21)

3 2 4

2)

3 1 2

gem. Nenner $21 \times 2 \times 3 \times 2 = 252$.

* * *

360

$\frac{3}{8}$	45	135
$\frac{7}{1}\frac{}{2}$	30	210
$\frac{5}{6}$	60	300
$\frac{2}{9}$	40	80
$\frac{4}{5}$	72	288

8 12 6 9 5

3)

8 4 2 3 5

2)

4 2 1 3 5

2)

2 1 1 3 5

gem. Nenner $= 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 360$.

Wenn unter den Nennern gar keine vorhanden sind, die ein gemeines Maaß haben; so muß man das Product aller Nenner selbst für den gemeinen Nenner behalten. In diesem Fall also muß eines jeden Bruchs Zehler und Nenner mit dem Product aller übrigen Nenner multiplicirt werden, welches die gemeine Regel ist.

Man sehe von dieser Aufgabe von Clausbergs demonstrativische Rechenkunst 655-662 §.

100 §.

Bayerische Staatsbibliothek München

100 §.

Es sind zwene, oder mehr Brüche gegeben, man soll alle zusammen addiren.

Aufl. Man bringe sie alle auf einerley Benennung, daferne sie nicht schon gleiche Nenner haben; addire darauf alle Zehler, und behalte den gemeinschaftlichen Nenner: so hat man die Summe (57. 48 §). Giebt dies einen uneigentlichen Bruch; so ist es gemeiniglich am bequemsten, durch die Division des Nenners in den Zehler die darin enthaltene ganze Zahl zu suchen, und den Bruch durch diese ganze Zahl, nebst dem überdem darin enthaltenen eigentlichen Bruch auszudrücken. Die eigentlichen Brüche, welche herauskommen, drückt man durch ihre kleinsten Zahlen aus.

Exempel.

252

$\frac{1}{6}\frac{3}{3}$	4	52
$\frac{9}{4\,2}$	6	54
$\frac{1}{8}\frac{1}{4}$	3	33

Sum. $\frac{139}{252}$

360.

$\frac{3}{8}$	45	135
$\frac{7}{1\,2}$	30	210
$\frac{5}{6}$	60	300
$\frac{2}{9}$	40	80
$\frac{4}{5}$	72	288

Sum. $\frac{1013}{360}$

oder $2\frac{2}{3}\frac{9}{6}\frac{3}{0}$

210

$\frac{2}{3}$	70	140
$\frac{4}{5}$	42	168
$\frac{6}{7}$	30	180
$\frac{1}{2}$	105	105

Sum. $\frac{593}{210}$

oder $2\frac{1}{2}\frac{7}{1}\frac{3}{0}$

101 §.

Ein eigentlicher Bruch wird zu einer ganzen Zahl selten anders addirt, als dadurch, daß man ihn an der ganzen Zahl unmittelbar anhängt. Will man inzwischen den uneigentlichen Bruch haben, der eine ganze Zahl nebst einem Bruch enthält, der letzte mag nun ein eigentlicher, oder uneigentlicher Bruch seyn: so kan man die ganze Zahl als einen Bruch ansehen, dessen Nenner 1 ist. Da sich dann dieser Bruch mit dem andern auf einerley Benennung bringen läst, und die Summe nach dem vorig. §. gesucht werden kan. So wird $3+\frac{5}{8} = \frac{24}{8}+\frac{5}{8} = \frac{29}{8}$.

102 §.

Einen kleinern Bruch vom größern zu subtrahiren.

Aufl. Ohne Zweifel ist derjenige Bruch kleiner, als der andre, der den kleinern Zehler hat, wenn die Nenner gleich sind; denn der erste enthält weniger Theile der Einheit von eben der Art, als der letzte. Nachdem also beyde auf einerley Benennung gebracht worden, dafern die Nenner nicht schon gleich groß sind: so subtrahire man den kleinern Zehler vom größern, nehme diese Differenz zum Zehler des gesuchten Bruchs, und behalte den gemeinschaftlichen Nenner: so ist der neue Bruch die gesuchte Differenz (57. 49 §.) die man denn auf die kleinsten Zahlen bringt.

Exempel.

103 §.

Wenn man einen Bruch von einer ganzen Zahl subtrahiren soll: so siehet man die ganze Zahl wiederum als einen Bruch an, dessen Nenner 1 ist und verfährt wie vorhin z. E. $7 - \frac{8}{5} = \frac{35}{5} - \frac{8}{5} = \frac{27}{5} = 5 + \frac{2}{5}$. Ist es ein eigentlicher Bruch, den man subtrahiren soll; so weiß man, daß derselbe allemahl kleiner, als 1 sey. Man darf demnach von der ganzen Zahl nur 1 abrechnen, den Bruch von 1 subtrahiren, und den Ueberschuß zu der um 1 verminderten ganzen Zahl wieder addiren. z. E. $5 - \frac{7}{9} = 4 + \frac{9}{9} - \frac{7}{9} = 4 + \frac{2}{9}$.

104 §.

Einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliciren.

Aufl. Man muß den Bruch so oft zu sich selbst addiren, als die ganze Zahl anzeiget (30 §.). Also darf

darf man nur den Zehler so oft addiren, und den Nenner behalten (100 §.). Aber das ist eben so viel, als wenn man den Zehler mit der ganzen Zahl multiplicirt (30 §.). Folglich ergiebt sich die Regel:

Man multiplicire den Zehler des Bruchs mit der ganzen Zahl, und lasse den Nenner ungeändert: so ist der neue Bruch, das gesuchte Product.

z. E. $\frac{5}{8} \times 7 = \frac{35}{8} = 4\frac{3}{8}$

$\frac{7}{9} \times 3 = \frac{21}{9} = 2\frac{1}{3}$

Eine andre Auflösung.

Eben dies Product kan man auch noch auf eine andre Art erhalten. Denn man betrachte zuerst einmahl einen Bruch, dessen Zehler 1 ist, z. E. $\frac{1}{16}$: so fällt in die Augen, daß man einen Bruch erhalte, der doppelt so groß, als der vorige ist, wenn man den Nenner halbirt, und $\frac{1}{8}$ statt $\frac{1}{16}$ nimt. Eben der Bruch wird viermahl größer, wenn man den Nenner viermahl kleiner macht, und $\frac{1}{4}$ statt $\frac{1}{16}$ nimt. Es fällt eben so leicht in die Augen, daß $\frac{1}{2}$ achtmahl größer, als $\frac{1}{16}$ sey. Ein Bruch von dieser Art wird also mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man seinen Nenner durch die ganze Zahl dividirt, ohne den Zehler zu ändern. Wenn man nun dabey in Betrachtung ziehet, das jeder Bruch, dessen Zehler > 1 ist, die Summe so vieler Brüche von jener Art sey, als der Zehler 1 enthält, so folgt daraus, daß diese Art, einen Bruch durch eine ganze Zahl zu multipliciren, sich algemein auf alle Brüche erstrecke.

Denn

Denn es ist z. E. $\frac{3}{16} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}$. Also $\frac{3}{16} \times 4 = (\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}) \times 4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ (48 §.) $= \frac{3}{4}$. Dies giebt die Regel.

Das Product eines Bruchs durch eine ganze Zahl wird auch gefunden, wenn man den Nenner des Bruchs durch die ganze Zahl dividirt, und den Zehler nicht ändert.

Es ist übrigens diese Regel eine Folge der ersten. Wenn nemlich nach der ersten Regel $\frac{3}{16} \times 4 = \frac{3 \times 4}{16}$, so ist nach dem 64 §. auch $\frac{3 \times 4}{16} = \frac{3 \times 4 : 4}{16 : 4} = \frac{3}{4}$, also $\frac{3}{16} \times 4 = \frac{3}{4}$. Man sieht leicht, daß dies alles, nicht auf die bestimte Größe der zu Beyspielen gebrauchten Brüche eingeschränkt sey; sondern allemahl seine Richtigkeit habe, was auch für Brüche vorkommen.

Weil man allemahl gerne einen Bruch durch seine kleinsten Zahlen ausdrückt; so ist es vortheilhafter, einen Bruch mit einer ganzen Zahl nach der letzten Regel zu multipliciren, als wenn man es nach der ersten bewerkstelliget, dafern nur der Nenner des Bruchs sich durch die ganze Zahl ohne Rest dividiren läst. Wiedrigenfalls würde im Nenner des Products ebenfalls ein Bruch kommen, und das Product ein gebrochener Bruch werden (64 §.) Ob nun gleich Brüche von dieser Art, wenn sie nach der letzten Regel herauskommen, die Aufgabe eben so gut auflösen, wie die regulären Brüche, welche die erste Regel giebt; so vermeidet man sie doch gern in der Ausübung, weil der eigentliche Werth dieser

Brüche nicht so unmittelbar in die Augen fält, wie bey jenen regulären Brüchen.

105 §.

Einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu dividiren.

Aufl. Wenn zweene Brüche gleiche Nenner haben: so ist ohne Zweifel der erste Bruch halb so groß, als der zweyte, wenn sein Zehler halb so groß ist, als der Zehler des letzten, und dies nicht allein: der erste wird der dritte, vierte, fünfte Theil, u.s.w. des zweyten seyn, wenn sein Zehler der dritte, vierte, fünfte Theil, u.s.f. von dem Zehler des zweyten ist, oder, welches einerley ist, wenn sein Zehler der Quotient ist, den man durch die Division des letzten Zehlers mit 3. 4. 5. u.s.f. findet 42 §. Dies folgt aus dem 100 §., und giebt die Regel:

Man dividire den Zehler des Bruchs durch die ganze Zahl, und lasse den Nenner ungeändert: so wird der neue Bruch der gesuchte Quotient seyn.

So erhält man $\frac{12}{7} : 3 = \frac{4}{7}$; $\frac{9}{8} : 3 = \frac{3}{8}$; $\frac{7}{4} : 3 = \frac{2\frac{1}{3}}{4}$. Das letzte Exempel ergiebt, daß man nach dieser Regel wiederum einen irregulären Bruch finde, wenn der Zehler durch die ganze Zahl nicht theilbar ist. Aber man kan den Quotienten auch auf eine andre Art erhalten, bey welcher nie irreguläre Brüche verkommen.

Eine andere Auflösung.

Wenn nemlich der Zehler des Bruchs 1 ist, und man nimt seinen Nenner doppelt so groß, als vorher:

so

so ist der Bruch die Hälfte des vorigen. So ist z. E. $\frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} : 2$; $\frac{1}{3 \times 2} = \frac{1}{6} = \frac{1}{3} : 2$. Man sieht leicht, daß aus dem Bruch der dritte Theil des vorigen werde, wenn man den Nenner mit 3 multiplicirt. Es ist z. E. $\frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} : 3$, $\frac{1}{4 \times 3} = \frac{1}{12} = \frac{1}{4} : 3$. Man erhält auf die Art allemahl denjenigen aliquoten Theil des Bruchs, den die ganze Zahl anzeigt, und der Bruch wird auf solche Art durch die ganze Zahl dividirt. Aber hieraus folgt die algemeine Regel:

Man multiplicire den Nenner des gegebenen Bruchs durch die ganze Zahl, und lasse den Zehler ungeändert: so ist der neue Bruch der gesuchte Quotient.

Denn jeder Bruch ist die Summe so vieler Brüche von eben dem Nenner, mit dem Zehler 1 als in jedem Zehler 1 enthalten ist. So ist $\frac{3}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$, also $\frac{3}{8} : 2 = (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) : 2 = \frac{3}{8 \times 2}$ (48. 100. §.) $= \frac{3}{16}$.

Eben diese Regel ist auch eine Folge der vorigen, vermöge welcher $\frac{3}{8} : 2 = \frac{3:2}{8}$. Aber $\frac{3:2}{8} = \frac{3:2 \times 2}{8 \times 2}$ (64 §.) $= \frac{3}{8 \times 2}$, also auch $\frac{3}{8} : 2 = \frac{3}{8 \times 2}$. Eben so wird $\frac{7}{4} : 3 = \frac{7}{12}$, $\frac{5}{9} : 4 = \frac{5}{36}$, $\frac{9}{15} : 8 = \frac{9}{120}$.

106 §.

Eine Größe mit einem Bruche multipliciren heist den aliquoten Theil dieser Größe, welchen der Nenner des Bruchs anzeigt, so oft nehmen, als der Zehler des Bruchs die Einheit enthält. Vermöge des Sprachgebrauchs sind nemlich folgende Redensarten einerley. Eine Größe $\frac{1}{2}$ mahl nehmen, oder sie durch 2 theilen, ihre Hälfte nehmen: eine Größe $\frac{1}{3}$ mahl nehmen, oder sie durch 3 theilen, u. s. f. Weil nun bey ganzen Zahlen die Redensart: eine Größe n mahl nehmen, so viel heist, als sie durch die ganze Zahl n multipliciren; so nennt man das auch mit dem Bruch $\frac{1}{n}$ multipliciren, wenn man $\frac{1}{n\text{ten}}$ einer Größe nehmen, oder eigentlich sie durch die ganze Zahl n theilen soll. Eben so bedeutet die Redensart: eine Größe $\frac{2}{3}$ mahl nehmen, eigentlich dies: man soll einen Drittheil derselben 2 mahl nehmen. Wenn also $\frac{1}{3}$ mahl nehmen, eigentlich durch 3 theilen heist; so ist $\frac{2}{3}$ mahl nehmen so viel, als durch 3 theilen, und was heraus komt, mit 2 multipliciren, und $\frac{5}{8}$ mahl nehmen heist durch 8 theilen, und was heraus komt, durch 5 multipliciren. Wenn also obgedachte Redensarten in den festgesetzten Sinn genommen werden, so kan man sagen: **Eine Größe mit einem Bruch multipliciren heisse sie so viel mahl nehmen, als der Bruch ausdrückt.** So hieß auch eine Größe mit einer ganzen Zahl multipliciren, sie so viel mahl nehmen, als die ganze Zahl ausdrückt. Bey der Multiplication mit einer ganzen Zahl ist 1 im Multiplicator so oft enthalten, als

das

das Multiplicandum im Product, und das Product ist so viel mahl größer, als das Multiplicandum. Bey der Multiplication mit einem Bruch ist der aliquote Theil der Einheit, welchen des Multiplicators Nenner anzeigt, im Multiplicator so oft enthalten, als ein ähnlicher aliquoter Theil des Multiplicandi im Product, und wenn der Multiplicator ein eigentlicher Bruch ist, so ist das Product kleiner, als das Multiplicandum. Die Bezeichnung bleibt eben so, wie im 31 §.

107 §.

Wenn die vorhin erwehnten Redensarten in dem jetzt fest gesetzten Sinn genommen werden; so lassen sich verschiedene Sätze, die oben für ganze Zahlen erwiesen sind, auch für die Brüche erweitern.

War der Quotient zwoer ganzen Zahlen in einander, eine ganze Zahl: so drückte er aus, wie vielmahl der Divisor im Dividendo enthalten sey (52 §). Nun kan man eben so reden, wenn gleich der Quotient ein eigentlicher, oder uneigentlicher Bruch ist, der sich nicht auf eine ganze Zahl bringen läst. So kan man z. E. sagen: 3 sey $\frac{3}{4}$ mahl in 4 und 5, $2\frac{2}{5}$ mahl in 12 enthalten, das heist: 3 enthält den vierten Theil von 4 drey mahl; 5 ist zweymahl ganz, und überdem noch der fünfte Theil davon zweymahl, in 12 enthalten.

War der Multiplicator eine ganze Zahl, so drückte er aus, wie oft das Multiplicandum im Product enthalten sey. Man kan nun eben so reden, wenn der Multiplicator ein Bruch ist, z. E. 4 ist $\frac{2}{3}$ mahl in dem Product $4 \times \frac{2}{3}$ enthalten, das heist: der dritte Theil von 4 ist darinnen zweymahl enthalten.

108 §.

Eine ganze Zahl mit einem Bruch zu multipliciren.

Aufl. Man multiplicire die ganze Zahl mit des Bruchs Zehler, und dividire das Product durch den Nenner: so ist das gesuchte Product gefunden. z. E. $3 \times \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$, $4 \times \frac{5}{8} = \frac{20}{8} = 2\frac{1}{2}$.

Beweis. Man soll der ganzen Zahl 3 dritten Theil nehmen, und ihn mit 2 multipliciren; so ist 3 mit $\frac{2}{3}$ multiplicirt (106 §.) Aber $\frac{3}{3} \times 2 = \frac{3 \times 2}{3}$ (104 §.). Eben so soll man der ganzen Zahl 4 achten Theil nehmen, und ihn mit 5 multipliciren; so ist 4 mit $\frac{5}{8}$ multiplicirt; aber $\frac{4}{8} \times 5 = \frac{4 \times 5}{8}$.

Ueberhaupt ist $A \times \frac{n}{m} = \frac{A}{m} \times n = \frac{A \times n}{m}$.

109 §.

Eine ganze Zahl, und ein Bruch geben einerley Product, wenn man jene mit diesem, oder diesen mit jener multipliciren.

Beweis. Es ist $4 \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{3}$ (108 §.) $= \frac{2 \times 4}{3}$ (104 §.) Also $4 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times 4$ (108 §.). Der Beweis ist an die Größe der gebrauchten Zahlen nicht gebunden, und also algemein.

110 §.

Gleiche Größen durch gleiche Brüche multiplicirt, geben gleiche Producte.

Bey gleichen Multiplicandis giebt der grössere Bruch ein größeres Product, als der kleinere.

Das größere Multiplicandum mit einem größern Bruch multiplicirt, giebt ein größeres Product, als wenn man das Kleinere mit dem kleinern Bruch multiplicirt.

Beweis. Wenn die Multiplicatores nicht Brüche von gleicher Benennung sind: so bringe man sie auf gleiche Nenner (99 §.) Nun werden gleiche Multiplicatores auch gleiche Zehler, der größere aber einen größern Zehler haben, als der kleinere, und denn folgen obige Sätze aus dem 106. 44. 32. 35. §. §.

111 §.

Wenn die Redensarten: eine Größe ist in der andern $\frac{1}{2}$ mahl, $\frac{1}{3}$ mahl u. s. f. enthalten, so erklärt werden, wie im 107 §.: so heist eine Größe durch einen Bruch dividiren, nichts anders, als eine neue Größe suchen, die so viel mahl im Dividendo enthalten ist, als der Bruch ausdrückt. Die Zahl 4 durch $\frac{1}{2}$ dividiren, heist also, eine Zahl suchen, die $\frac{1}{2}$ mahl in 4 enthalten ist, das heist, deren Hälfte 4 ist. Es erhellet leicht, daß dies die Zahl 8 sey. Die Zahl 6 durch $\frac{2}{3}$ dividiren heist eine Zahl suchen, die $\frac{2}{3}$ mahl in 6 enthalten ist, das heist: davon der dritte Theil, zweymahl genommen 6 macht. Diese Zahl ist keine andre, als 9. Es wird diese Division eben so bezeichnet, wie im 42 §. gezeigt worden.

112 §.

Wenn man eine Größe *M* mit einem Bruch multiplicirt, und das Product durch eben den-

denselben Bruch wieder dividirt: so muß das Multiplicandum der Quotient werden. Es sey $M \times \frac{2}{3} = F$: so ist M $\frac{2}{3}$ mahl in F enthalten (107 §.). Aber $F : \frac{2}{3}$ ist auch $\frac{2}{3}$ mahl in F enthalten (111 §.), also $M = F : \frac{2}{3}$.

Auch wenn man eine Größe *D* mit einem Bruche dividirt, und den Quotienten durch eben den Bruch wieder multiplicirt: so muß das Dividendum zum Product wieder herauskommen. Es sey $D : \frac{2}{3} = Q$, so ist D eine Größe, welche Q $\frac{2}{3}$ mahl enthält (111 §.). Aber auch $Q \times \frac{2}{3}$ ist eine Größe, welche Q $\frac{2}{3}$ mahl enthält (107 §.). Also ist $Q \times \frac{2}{3} = D$. Demnach ist der Satz des 43 §. auch von Brüchen wahr.

113 §.

Eine Größe mit einem Bruch dividiren, ist eben so viel, als diese Zahl mit dem umgekehrten Bruch multipliciren.

Beweis. Es sey $D : \frac{2}{3} = Q$; so ist $D = Q \times \frac{2}{3}$ (112 §.), das heist $\frac{Q}{3} \times 2 = D$ (106 §.). Also $\frac{Q}{3} = \frac{D}{2}$ (44 §.) und $Q = \frac{D}{2} \times 3$ (32 §) $= D \times \frac{2}{3}$ (106 §.). Dieser Beweis ist an die bestimte Größe der Zahlen nicht gebunden, und man kan ihn algemein so führen. Es sey $D : \frac{n}{m} = Q$, wo in *n*, *m*, ganze Zahlen bedeuten: so ist $D = \times \frac{n}{m}$ d. i. $D = \frac{Q}{m} \times n$ (106 §.). Also $\frac{D}{n}$

=

$= \frac{Q}{m}$ (44 §.) und $Q = \frac{D}{n} \times m$ (32 §.) $=$ $D \times \frac{m}{n}$ (106 §.)

114 §.

Eine ganze Zahl mit einem Bruch zu dividiren.

Aufl. Man multiplicire die ganze Zahl mit des Bruchs Nenner, und dividire, was herauskomt, mit des Bruchs Zehler: so ist der gesuchte Quotient gefunden. Z. E. $6 : \frac{2}{3} = \frac{18}{2} = 9$; $5 : \frac{3}{7} = \frac{35}{3} = 11\frac{2}{3}$. Die Richtigkeit der Regel erhellet leicht aus dem 113 und 108 §. So ist $5 : \frac{3}{7} = 5 \times \frac{7}{3}$ (113 §.) $= \frac{5 \times 7}{3}$ (108 §.).

115 §.

Gleiche Größen durch gleiche Brüche dividirt, geben gleiche Quotienten, und das grössere Dividendum giebt einen größern Quotienten, als das kleinere bey gleichen Divisoren.

Bey gleichen Dividendis aber giebt der größere gebrochne Divisor einen kleinern, und der kleinere, einen größern Quotienten.

Beweis. Wenn die Brüche auf gleiche Benennung gebracht sind: so folgt alles leicht aus dem 113 44. 46. 47. 32. 35 §.

116 §.

Einen Bruch mit einem andern Bruch zu multipliciren.

I. Auf-

I. Auflösung.

Man nehme das Product beyder Zehler zum Zehler, und das Product beyder Nenner zum Nenner eines neuen Bruchs: so wird derselbe das gesuchte Product seyn. Z. E. $\frac{7}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{14}{24}$ $\frac{5}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

Beweis. Man muß das Multiplicandum durch den Nenner des Multiplicators dividiren, und was herauskomt, mit dem Zehler des Multiplicators multipliciren (106 §.) Also ist $\frac{7}{8} \times \frac{2}{3} = (\frac{7}{8} : 3) \times 2 = \frac{7}{8 \times 3} \times 2$ (105 §. Aufl.) $= \frac{7 \times 2}{8 \times 3}$ (104 §. 1 Aufl.)

II. Auflösung.

Man dividire kreutzweise des Multiplicandi Zehler durch des Multiplicators Nenner, und jenen Nenner, durch diesen Zehler: so ist jener Quotient der Zehler, und dieser der Nenner des gesuchten Quotienten. Z. E. $\frac{6}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{6:3}{8:2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $\frac{4}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{4:7}{5:3} = \frac{\frac{4}{7}}{1\frac{2}{3}}$. Diese Regel giebt gebrochne Brüche (64 §.), wenn die Divisionen nicht aufgehen, wie im letzten Exempel. Aber wenn alles aufgehet, ist sie vortheilhafter als die erste, weil man zugleich dadurch solche Brüche zu Producten erhält, die durch ihre kleinsten Zahlen ausgedrückt sind.

Beweis. Es ist $\frac{4}{5} \times \frac{3}{7} = (\frac{4}{5} : 7) \times 3$ (106 §.) $= \frac{4:7}{5} \times 3$ (105 §. 1 Aufl.) $= \frac{4:7}{5:3}$ (104 §. 2 Aufl.)

III.

III. Auflösung.

Man multiplicire den Zehler des Multiplicandi in den Multiplicator, und lasse den Nenner ungeändert. Z. E. $\frac{4}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{\frac{12}{7}}{5}$; $\frac{3}{5} \times \frac{7}{8} = \frac{\frac{21}{8}}{5}$.

Beweis. Es ist $\frac{4}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{4 \times 3}{5 \times 7} = \frac{4 \times 3}{5} : 7 = \frac{4 \times 3 : 7}{5}$ (105 §. 1 Aufl.) $= \frac{4 \times 3}{\frac{7}{5}}$ (58 §.) $= \frac{4 \times \frac{3}{7}}{5}$ (108 §.).

IV. Auflösung.

Man dividire des Multiplicandi Nenner mit dem Multiplicator, und behalte den Zehler. Z. E. $\frac{4}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}}$; $\frac{3}{5} \times \frac{7}{8} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}}$.

Beweis. Es ist auch $\frac{4}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{4}{5 \times 7} \times 3 = \frac{4}{5 \times 7} : 3$ (104 §. 2 Aufl.) $= \frac{\frac{4}{5 \times 7}}{3} = \frac{4}{5 : \frac{3}{7}}$ (113 §.).

117 §.

Zwene Brüche geben mit veränderter Ordnung der Factoren, einerley Product.

Beweis. Es ist $\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{A \times C}{B \times D}$ und $\frac{C}{D} \times \frac{A}{B} = \frac{C \times A}{B \times D}$ (116 §.). Da nun $A \times C$

$= C \times A$, und $B \times D = D \times B$ (33 §.), wenn die Buchstaben ganze Zahlen bedeuten; so ist auch $\frac{A \times C}{B \times D} = \frac{C \times A}{D \times B}$ und $\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{C}{D} \times \frac{A}{B}$.

118 §.

Ein Product so vieler Factoren, als man will, es mögen ganze, oder gebrochne Zahlen, oder beyde Arten durch einander seyn, ändert sich also nicht, wenn man die Ordnung der Factoren ändert (117. 109. 33 §.)

119 §.

Einen Bruch mit einem andern zu dividiren.

I. Auflösung.

Man multiplicire kreutzweise des Dividendi Zehler, in des Divisors Nenner, und des Dividendi Nenner in des Divisors Zehler: so ist jenes Product der Zehler, und dieses der Nenner des gesuchten Bruchs (113. 116 §. 1 Aufl.) z. E. $\frac{3}{4} : \frac{2}{9} = \frac{3}{4} \times \frac{9}{2}$ (113 §.) $= \frac{27}{8}$ (116 §.) $= 3\frac{3}{8}$; $\frac{11}{12} : \frac{6}{7} = \frac{77}{72} = 1\frac{5}{72}$.

II. Auflösung.

Man dividire den Zehler und Nenner des Dividendi, jenen durch den Zehler, und diesen durch den Nenner des Divisors: so ist jener Quotient der Zehler und dieser der Nenner des gesuchten Bruchs (113. 116 §. 2 Aufl.) z. E. $\frac{21}{24} : \frac{3}{8} = \frac{21}{24} \times \frac{8}{3}$ (113 §.) $= \frac{7}{3}$ (116 §. 2 Aufl.); $\frac{5}{9} : \frac{7}{8} = \frac{\frac{5}{7}}{\frac{9}{8}} = \frac{\frac{5}{7}}{1\frac{1}{8}}$.

III. Auflösung.

Man dividire den Zehler des Dividendi durch den Di-

Divisor, und lasse den Nenner ungeändert (113. 116 §. 3 Aufl.) z. E. $\frac{5}{8} : \frac{4}{9} = \frac{5}{8} \times \frac{9}{4}$ (113 §.) = $\frac{5 \times \frac{9}{4}}{8}$ 116 §. 3 Aufl.) = $\frac{5 : \frac{4}{9}}{8}$ (114 §).

IV. Auflösung.

Man multiplicire des Dividendi Nenner durch den Divisor, und lasse den Zehler ungeändert (113. 116 §. 4 Aufl.) z. E. $\frac{5}{8} : \frac{4}{9} = \frac{5}{8} \times \frac{9}{4}$ (113 §.) = $\frac{5}{8 : \frac{9}{4}}$ (116 §. 4 Aufl.) = $\frac{5}{8 \times \frac{4}{9}}$ 114 §.

120 §.

Wenn das Dividendum eine Zahl, und der Divisor ein Bruch ist, so drückt der Quotient aus, wie viel mahl der Divisor im Dividendo enthalten sey.

Beweis. Es sey D das Dividendum, und $\frac{n}{m}$ der Divisor, Q der Quotient: so hat man D : $\frac{n}{m}$ = Q, also D = Q × $\frac{n}{m}$ 112 §. Aber Q × $\frac{n}{m}$ = $\frac{n}{m}$ × Q, es mag Q eine ganze Zahl, oder ein Bruch seyn (109. 117 §). Also D = $\frac{n}{m}$ × Q und D : Q = $\frac{n}{m}$ 112 §. Also drückt Q aus wie oft $\frac{n}{m}$ in D enthalten sey (111 §).

121 §.

Der Satz gilt auch umgekehrt: Eine Zahl, welche ausdrückt, wie vielmahl der Divisor im Dividendo enthalten sey, ist der Quotient.

Beweis. Es sey $\frac{\nu}{\mu}$ diese Zahl, welcher Ausdruck auch eine ganze Zahl vorstellet, wenn $\mu = 1$ ist: so hat man $D = d \times \frac{\nu}{\mu}$ (106 §). Also auch $D = \frac{\nu}{\mu} \times d$ (109. 117 §) und $D : d = \frac{\nu}{\mu}$ (112 §).

122 §.

Man kan also überhaupt sagen, eine Zahl durch eine andre dividiren heisse untersuchen, wie vielmahl die letzte in der ersten enthalten sey (52. 107. 121 §): und aus dieser Erklärung der Division folgen eben die Rechnungsregeln des 119 §. Will man wissen, wie oft ein Bruch $\frac{2}{9}$ in einem andern $\frac{3}{4}$ enthalten sey; so darf man sie nur beyde auf einerley Benennung bringen, und alsdann suchen, wie oft des ersten Zehler in des letzten Zehler enthalten sey. So würde man im gegenwärtigen Fall erhalten $\frac{2}{9} = \frac{2 \times 4}{9 \times 4}$ und $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 9}{4 \times 9}$, folglich $\frac{3}{4} : \frac{2}{9} = \frac{3 \times 9}{2 \times 4}$, welches die erste Regel des 118 § ist.

123 §.

Wenn Zehler und Nenner eines Bruchs durch einen und eben denselben andern Bruch multiplicirt, oder dividirt werden: so ändert dies die Größe des Bruches nicht.

Beweis.

Beweis. Es ist $\frac{5 \times \frac{2}{3}}{8 \times \frac{2}{3}} = (\frac{5}{8} \times \frac{2}{3}) : \frac{2}{3}$ (116. 119 §) $= \frac{5}{8}$ (112 §). So ist auch $\frac{5 : \frac{2}{3}}{8 : \frac{2}{3}} = (\frac{5}{8} : \frac{2}{3}) \times \frac{2}{3}$ (116. 119 §) $= \frac{5}{8}$ (112 §).

Ein irregulärer, oder gebrochner Bruch von dieser Art $\frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{7}}$, ist mit dem Quotienten $\frac{5}{8} : \frac{3}{7}$ einerley, und umgekehrt, der Quotient mit dem Bruch.

Beweis. Denn $\frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{7}} = \frac{5 : 8}{3 : 7}$ (57 §) und $\frac{5}{8} : \frac{3}{7} = \frac{7 \times 5}{8 \times 3} = \frac{5 \times 7}{3 \times 8}$ (33 §) $= \frac{5}{3} : \frac{5}{7} = \frac{5 : 8}{3 : 7}$ (119 §); also $\frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{7}} = \frac{5}{8} : \frac{3}{7}$ (11 §).

124 §.

Aus dem bisherigen ist nun leicht abzunehmen, wie man die Regeln der vier Rechnungsarten anzuwenden habe, wenn unter den gegebenen Zahlen solche vorkommen, die aus ganzen Zahlen mit angehängten Brüchen bestehen. Man kan solche Zahlen nach dem 101 § auf uneigentliche Brüche bringen, und mit ihnen in der Rechnung sodann nach den Regeln der Bruchrechnung umgehen. Aber dies Verfahren ist nicht allemahl das kürzeste.

Beym addiren ist es gemeiniglich am bequemsten, wenn man zuerst die angehängten Brüche summirt, die Summe, dafern ein uneigentlicher Bruch herauskomt, auf die darin enthaltne ganze Zahl bringt,

und den übrig bleibenden Bruch, unter der Columne der Brüche schreibt, hierauf aber die herausgebrachte ganze Zahl mit zu den ganzen Zahlen summirt.

Exempel.

$7\frac{7}{8}$

$5\frac{2}{3}$

$3\frac{7}{9}$

Sum. $17\frac{2}{7}\frac{3}{2}$

8 3 9

3)

8 1 3

gem. N. 3. 8. 3. = 72.

72

$\frac{7}{8}$	9	63
$\frac{2}{3}$	24	48
$\frac{7}{9}$	8	56
		167

Sum. 72

oder $2\frac{2}{7}\frac{3}{2}$.

Auch beym Subtrahiren kan man zuerst die Rechnung mit den angehängten Brüchen vornehmen, und sodann zu den ganzen Zahlen fortgehen. Wenn hier die Zahl, welche man subtrahiren muß, einen größern Bruch bey sich hat, als die, wovon man sie subtrahiren soll: so darf man nur zu dem Bruch der letztern 1 zurechnen, wodurch denn die ganze Zahl um 1 vermindert wird. Z. E.

$27\frac{3}{8}$ $136\frac{1}{2}\frac{7}{4}$ 24 32

$15\frac{7}{8}$ $95\frac{2}{3}\frac{1}{2}$

8)

3 4

Rest $11\frac{1}{2}$ $41\frac{5}{9}\frac{5}{6}$ g. N. = 8. 3. 4. = 96.

96

$\frac{1}{2}\frac{7}{4}$	4	68
$\frac{2}{3}\frac{1}{2}$	3	63

Rest $\frac{5}{9}\frac{5}{6}$

125 §.

Die Sätze des 38 und 48 § gelten noch, wenn gleich der Multiplicator oder Divisor Brüche sind.

Wenn

Wenn also bey der Multiplication an den Factoren Brüche hängen, so kan man jeden Theil des einen Factors in jeden Theil des andern multipliciren, und zuletzt diese Producte addiren. Oder man kan auch beyde Factoren zuerst auf uneigentliche Brüche bringen, wie man es am bequemsten findet. Z. E.

$8\frac{5}{8}$
$7\frac{2}{3}$

$5\frac{1}{3}\ \frac{5}{12}$
$4\frac{3}{8}$
56

Prod. $66\frac{1}{8}$

12 8 3
4)
3 2 3
g. N. 4. 3. 2. 3. = 72

72

$\frac{5}{12}$	6	30
$\frac{1}{3}$	24	24
$\frac{3}{8}$	9	27

Sum. $\frac{81}{72}$
oder $1\frac{1}{8}$

Man kan auch so rechnen.

Es ist $8\frac{5}{8} \times 7\frac{2}{3} = \frac{69}{8} \times \frac{23}{3}$

69 · 8 = 1587 | $66\frac{1}{8}$

23 · 3 = 24 | Product.

207 · 24 = 144

138 · 147

1587 · 24

144

3

Wenn der Divisor eine ganze Zahl mit einem angehängten Bruch ist; so muß man ihn allemahl auf einen uneigentlichen Bruch bringen, und da ist es gemeiniglich am kürzesten, wenn man auch das Dividendum auf einen uneigentlichen Bruch bringet,

besonders wenn die angehängten Brüche schon einerley Benennung haben, worauf man sie auch jedesmahl leicht bringen kan. Z. E.

$48\frac{2}{3} : 6\frac{4}{5} = \frac{146}{3} : \frac{34}{5}$

146	34	730	$7\frac{8}{11}$
5	3	102	Quot.
730	102	714	
		16	

Der VII. Abschnitt.

Von den Decimal-Brüchen insbesondere.

126 §.

Ein uneigentlicher Bruch von dieser Art $\frac{5832689577}{1000000}$ läst sich ohne alle weitläuftige Rechnung auf folgende Art in die darin enthaltne ganze und eigentliche gebrochne Zahl auflösen. Man darf nur erwegen, daß dieser Ausdruck eben so viel sey, als $\frac{5832000000}{1000000} + \frac{689577}{1000000}$: so hat man $5832\frac{689577}{1000000}$. Die Regel würde diese seyn.

Man zertheile den Zehler in zwey Stücke, so daß das niedrigste Stück so viele Ziffern bekomt, als im Nenner Nullen sind: so wird dies leztere Stück der Zehler des anzuhängenden Bruchs von eben dem Nenner, das andre Stück aber die ganze Zahl seyn, die nebst dem vorigen wahren Bruch in dem uneigentlichen enthalten ist. Man

Man pflegte daher in den gewöhnlichen Rechenbüchern wohl die Regel zu geben; man solle so viele Ziffern des Dividendi, als der Divisor Nullen hat, durch einen Strich, etwa auf die Art 5832|68957, rechter Hand abschneiden: so sey die Division geschehen. Man hat nun nicht nöthig den Bruch $\frac{68957}{100000}$ besonders hinzuschreiben, da man ohnehin weiß, daß die abgeschnittene Zahl sein Zehler, und die Einheit mit so vielen Nullen, als man Ziffern abgeschnitten hat, sein Nenner werde.

Diese Art der Bezeichnung behält man mit vieler Bequemlichkeit in der Mathematik bey, nur daß man statt des Strichs hier ein Comma (,) oder einen Punkt (.) braucht, auf die Art 5832,68957. Ob zwar der Punkt auch gebraucht wird, die Multiplication zu bezeichnen: so ist doch daher keine Verwirrung zu besorgen, wenn bey Zahlen, woran dergleichen Brüche hängen, die Multiplication nie anders, als mit dem Zeichen × andeutet.

127 §.

Auf solche Art hat man nie nöthig den Nenner eines an einer ganzen Zahl hängenden eigentlichen Bruchs ausdrücklich hinzuschreiben, wenn dieser Nenner die 1 ist mit einer Reihe daran hängender Nullen, und der Zehler des Bruchs aus eben so vielen Ziffern bestehet, als der Nenner Nullen enthält. Ein Ausdruck von dieser Art 24,5737894 wird allemahl den Quotienten bedeuten, der durch die Division dieser ganzen Zahl, ohne das Comma in Betracht zu ziehen, würde gefunden werden, wenn der Divisor die 1 wäre mit so vielen beygefügten Nullen, als nach dem Comma Ziffern folgen, deren im

gegenwärtigen Fall sieben seyn würden. Also ergiebt sich von selbst, daß diese Zahl eben so viel sey, als $24,\frac{5}{10}\frac{7}{00}\frac{3}{000}\frac{7}{0000}\frac{8}{00000}\frac{9}{000000}\frac{4}{0000000}$. Das Comma steht hier allemahl bey der Ziffer, welche die Einer bedeutet. Man siehet leicht, daß die Werthe der Ziffern, welche nach dem Comma, gegen die rechte Hand zu folgen, nach eben dem Decimal-Gesetz abnehmen, nach welchem die Werthe der Ziffern wachsen, die von dem Ort der Einer gegen die Linke fortgehen. Jede gegen die rechte Hand folgende Ziffer hat einen zehnmahl kleinern Werth, als sie in der nechst vorhergehenden Stelle würde gehabt haben. So bedeutet jede Ziffer nach dem Ort der Einer,

in der ersten Stelle Zehntheile,
in der zweyten Hunderttheile,
in der dritten Tausendtheile u. s. f.

von der Einheit. Man nehme nur die letzte Zahl zum Exempel, so ergiebt sich die Richtigkeit folgender Ausdrücke von selbst.

$24,5 = 24\frac{5}{10}$

$24,57 = 24\frac{57}{100} = 24 + \frac{5}{10} + \frac{7}{100}$

$24,573 = 24\frac{573}{1000} = 24 + \frac{5}{10} + \frac{7}{100} + \frac{3}{1000}$

u. s. f.

Es zerlegen sich demnach solche Brüche von selbst in solche Theile, deren Zehler einfache Ziffern, die Nenner folgende Zahlen sind 10, 100, 1000, 10000 u. s. f. so daß jeder folgende Nenner zehnmahl größer, als der vorhergehende ist. Man nennt sie Decimal-Brüche.

128 §.

Es lassen sich demnach die Ziffern, woraus ein Decimal-Bruch besteht, auf ähnliche Art, wie die

Zif-

Ziffern einer ganzen Zahl, in Ziffern verschiedener, aber abnehmender Decimal-Ordnungen eintheilen, so wie die Ziffern einer ganzen Zahl zu verschiedenen wachsenden Decimal-Ordnungen gerechnet werden. Die Ziffer nach dem Ort der Einer gehöret zur ersten abnehmenden Ordnung, die zweyte zur zweyten u. s. f.

129 §.

Will man einen solchen Bruch, dergleichen im 127 § der Zahl 24 beygefüget ist, für sich allein hinschreiben, ohne ihn an einer ganzen Zahl anzuhängen: so scheint es, daß man sich obiger Verkürzung nicht bedienen, und den Nenner nicht weglassen könne. Allein da in diesem Fall keine ganze Zahl vorhanden ist, so ist nur nöthig, daß man in der Stelle, wo sonst die niedrigste Ziffer dieser ganzen Zahl stehen müste, eine o hinschreibe, und das Zeichen der Einer dabey setze.

Denn so ist $0,5737894 = \frac{5}{1}\frac{7}{0}\frac{3}{0}\frac{7}{0}\frac{8}{0}\frac{9}{0}\frac{4}{0}$. Diese Betrachtung läst sich leicht allgemeiner auch auf solche Brüche anwenden, die von den bisherigen nur darin unterschieden sind, daß ihr Zehler aus weniger Ziffern bestehet, als im Nenner Nullen vorkommen, wenn man auf folgende Umstände acht hat.

130 §.

Eine auf gewöhnliche Art geschriebene ganze Zahl wird nicht verändert, wenn man linker Hand so viele Nullen, als man will beyfüget. So ist 0000743 eben so viel als 743, denn hiedurch ändert sich die Stelle der Einer nicht, wovon die Werthe der übrigen Stellen abhängen. Ist dies gewiß, so kan

man

man dem Zehler eines Bruchs von dieser Art $\frac{743}{1000000}$ allemahl so viele Nullen voransetzen, daß die Anzahl der Ziffern und Nullen zusammengenommen, mit der Anzahl der Nullen im Nenner einerley werde, und so ist dieser Fall auf den vorigen gebracht. Man kan nun den Nenner weglassen, und die Ausdrücke $\frac{743}{1000000}$; $\frac{0000743}{1000000}$; 0,0000743 (129 §), werden einerley seyn, und einerley Zahl bedeuten. Ueberhaupt also wird die niedrigste Ziffer des Zehlers von der Stelle der Einer um so viele Stellen wegzurücken seyn, als der Nenner Nullen enthält. So werden demnach auch die Ausdrücke 0,000000052 und $\frac{52}{1000000000}$ imgleichen 0,00300705 und $\frac{300705}{100000000}$ einerley seyn.

131 §.

Würde man an einer ganzen Zahl rechter Hand Nullen anhängen, so würde hiedurch allerdings der Werth aller ihrer Ziffern, und der ganzen Zahl selbst geändert werden (15. 16. §). Wenn man aber die Stelle der Einer mit einem Zeichen bemerkt, und hiedurch fest setzt, daß dies ein für allemahl die Stelle der Einer bleiben soll; so ändert auch diese Beyfügung der Nullen die Zahl gar nicht. Schreibt man nemlich nun rechter Hand eine, oder mehr Nullen hinzu, so ist es so gut, als wenn man hiedurch zwar mit 10 oder 100 u. s. f. multiplicirt, aber zugleich mit eben der Zahl wieder dividirt. Es ergiebt sich nemlich nun von selbst, daß z. E. 135,00000 $= \frac{13500000}{100000}$ (127 §.) $= 135$ sey. Eben dies erstreckt sich auf jede nach den bisherigen Regeln ausgedrückte Zahl. Wenn der Ort der Einer mit einem Zeichen ein für allemahl bemerket ist; so kan

man

man am Ende rechter Hand so viele Nullen, als man will, anhängen, ohne daß dadurch die Zahl geändert wird. So ist auch z. E. 0,0024 = 0,00240000 $= \frac{24}{10000} = \frac{240000}{10000000}$.

132 §.

Zwo oder mehr Zahlen, unter welchen Decimal-Brüche vorkommen, zu addiren.

Aufl. Man schreibe die Zahlen wiederum so untereinander, daß diejenigen einfachen Ziffern, welche zu einerley Ordnung gehören, untereinander kommen. Dieses erhält man leicht, wenn man von jeder folgenden Zahl die Ziffer, so die Einer ausdrückt, zuerst unter der Classe der Einer der vorhergehenden Zahl setzt. Denn so ergeben sich die übrigen sowohl gegen die Linke, als auch gegen die rechte Hand von selbst.

Hierauf addire man alle Zahlen nach den Regeln des 23 und 24 §, und bezeichne in der Summe die Ziffer mit dem Zeichen der Einer, welche in der Columme der Einer zu stehen kömt.

Exempel.

738,2400 A	473,683
25,9836 B	0,06423
324,3000 C	0,7043
1088,5236. Summe.	474,45153

Beweis. Jeder Ausdruck von dieser Art ist ein uneigentlicher Bruch, dessen Zehler die Zahl selbst seyn würde, wenn das Zeichen (,) wegbliebe, der Menner aber die 1 mit so viel Nullen, als nach diesem Zeichen einzelne Ziffern folgen. Wenn nun

gleich

gleich in den Zahlen, welche man summiren soll, die Anzahl der Decimal-Stellen und also die Benennung ungleich ist: so kan man doch diese dadurch in allen gleich machen, wenn man rechter Hand an jeder Zahl so viele Nullen anhängt, bis alle gleich viel Decimalstellen haben (131 §), und so sind dies lauter Brüche von gleicher Benennung. Deswegen summirt man nur ihre Zehler, und behält den gemeinschaftlichen Nenner in der Summe dadurch bey, daß man so viel Decimal-Stellen rechter Hand abschneidet, als der gemeinschaftliche Nenner Nullen hat (100 §). Man siehet leicht, daß es zum würklichen summiren nicht erfordert werde, die Nullen den Zahlen, wie A und C beyzufügen. Deswegen können sie allemahl, wie im zweyten Exempel wegbleiben.

133 §.

Zwo Zahlen sind noch von der Art, wie im vorigen §, und es wird verlangt, die kleinere von der größern zu subtrahiren.

Aufl. Man schreibe die Zahlen wie vorhin untereinander, und subtrahire nach den Regeln des 27 §. Im Rest setze man bey der Ziffer das Zeichen der Einer, welche in der Columne der Einer der gegebenen Zahlen zustehen komt.

Exempel.

782,37408	534,7372000
513,732	239,4307283.
Rest 268,64208	Rest 295,3064717.

Beweis. Die Regeln beruhen auf eben den Gründen, wie im vorig. § bey der Addition, wenn man hiemit den 102 § vergleichet. Wenn die Zahl, welche man subtrahiren soll, mehr Decimal-Stellen ent-

enthält, als die andere: so fält es gleich in die Augen, wie die Regeln des Borgens hier angewandt werden müssen, wenn man durch Beyfügung der Nullen die Anzahl der Decimal-Stellen gleich macht. Eben deswegen sind hier die Nullen im zweyten Exempel nur beygefügt, da man sonst, wenn man im Rechnen geübt ist, auch hier nicht nöthig hat, sie hinzuschreiben.

134 §.

Zwo Zahlen von eben der Art ineinander zu multipliciren.

Aufl. Man setze die Zahlen, wie es bey der Multiplication ganzer Zahlen gewöhnlich ist, untereinander, und verfahre nach den Regeln des 41 §, ohne daß man während des Rechnens die Zahlen selbst anders, als ganze Zahlen ansiehet. Am Ende der Rechnung setze man das Zeichen der Einheiten so, daß rechter Hand desselben so viele Decimalstellen folgen, als in beyden Factoren zusammen vorhanden sind.

Exempel.

73,5483	0,00324
3,724	0,0000032
2941932	648
1470966	972
5148381	0,00000000010368 Prod.
2206449	
273,8938692 Prod.	

Wenn im Product nicht so viele Ziffern herauskommen, als nach der Regel Decimal-Stellen in demselben seyn sollen: so schreibt man nach dem 130

§,

§, linker Hand so viele Nullen nach einander hin, bis man in allen so viele Ziffern hat, als die Regel erfordert, und überdem noch eine Null für die Stelle der Einer, wie im zweyten Exempel geschehen ist.

Beweis. Es sind hier nemlich zwene Brüche zu multipliciren, deswegen ist das Product ihrer Zehler des Products Zehler, und das Product ihrer Nenner des Products Nenner (115 §). Da nun der Nenner eines jeden Fectors so viele Nullen hat, als dieser Factor Decimalstellen enthält; so bekomt das Product der Nenner so viele Nullen, als die Anzahl der Decimalstellen beyder Factoren zusammen ausmacht, und dieser Nenner wird dadurch ausgedrückt, daß man im Product eben so viele Decimal-Stellen abschneidet (127 §).

135 §.

Bey der Rechnung mit den Decimal-Brüchen ist es zuweilen vortheilhafter, wenn man von der gewöhnlichen Art, das Product zwoer ganzen Zahlen zu suchen, in folgendem Umstande etwas abgeht. Man sucht nemlich gewöhnlich zuerst nach dem (41 §) das Product aus der niedrigsten Ziffer des Multiplicators in das Multiplicandum. Hierauf nimt man die nechst höhern, und geht so nach und nach fort bis auf die höchste, da man denn die einzelnen Producte gehörig untereinander schreibt, und zuletzt summirt. Allein man kan auch mit der Multiplication durch die höchste Ziffer des Multiplicators anfangen, und sodann nach und nach auf die nechstniedrigen, bis auf die niedrigste fortgehen, da es dann sich leicht ergiebt, wie die Producte untereinander gesetzt werden müssen, um die richtige Summe

der-

derselben zu erhalten. Auf die Art liesse sich das erste Exempel des vorigen § so berechnen.

73,5483
3,724
220,6449
51,48381
1,470966
2941932
Prod. 273,8938692

136 §.

Eine Zahl, woran Decimal-Stellen hängen, durch eine kleinere dergleichen Zahl zu dividiren.

Aufl. I. Wenn im Dividendo mehr Decimal-Stellen, als im Divisor vorhanden sind; so verfahre man auch hier völlig nach den Regeln des 68 §, und sehe bey der ganzen Rechnung die Zahlen nicht anders als ganze Zahlen an.

II. Bleibt zuletzt kein Rest, so schneidet man im Quotienten so viele Decimal-Stellen ab, als das Dividendum mehr, denn der Divisor enthält, wie im ersten Exempel, so hat man den ganzen Quotienten.

III. Bleibt aber ein Rest, den man nach den gewöhnlichen Regeln nicht weiter dividiren kan; so bestimt man zwar die Decimal-Stellen des bisher gefundenen Quotienten nach voriger Regel, addirt aber dazu einen Bruch, dessen Zehler der Rest ist, sein Nenner aber ein Product aus dem Divisor in die 1 mit so vielen Nullen, als der erste Theil des Quotienten Decimal-Stellen hat.

Exempel.

37,122 : 5,816.

6,4	2	4	2,334	1,45 $\frac{14}{1600}$.
320			1,6	
522			73	
64			64	
512			96	
102			64	
64			32	
384			14	
64				
384				

Beweis. Man soll hier einen Bruch durch den andern dividiren: also ist der Quotient ein Bruch, dessen Zehler und Nenner sich durch die Division der beyden Zehler und Nenner des Dividendi und Divisors in einander ergeben (118 §). Aber der Quotient der Zehler ist die nach der 1 Regel gefundene Zahl selbst, und der Quotient der Nenner ist die 1 mit so viel Nullen, als das Dividendum mehr Decimal-Stellen hat, denn der Divisor: und dieser wird durch das Abschneiden eben so vieler Decimal-Stellen im Quotienten ausgedrückt, wenn alles aufgeht. Ist dies nicht, so wird der Zehler des Quotienten selbst eine ganze Zahl mit dem Bruch, welchen die Division nach den Regeln des 68 § giebt, sein Nenner aber noch der vorhin gedachte. Demnach wird die ganze Zahl des Zehlers so viele Decimalstellen bekommen, als die Regel ausdrückt, der Bruch, als der zweyte Theil des Zehlers, aber mit

dem

dem vorhin gedachten Nenner noch zu dividiren, oder, welches dasselbe ist, sein Nenner damit zu multipliciren seyn.

Dieser Beweis wird völlig erläutert, wenn man sich die Berechnung des vorigen Exempels so vorstellt.

$$\frac{2334}{1000} : \frac{16}{10} = \frac{2334 : 16}{100} = \frac{145\frac{14}{16}}{100} =$$

$$1,45\frac{14}{1600}.$$

IV. Wenn der Divisor eben so viel, oder mehr Decimal-Stellen als das Dividendum enthält; so kan man vermöge des 131 § so viele Nullen rechter Hand anhängen, als man für nöthig findet. Eben dies Verfahren kan man allemahl anbringen, wenn man den Quotienten in mehrern Decimal-Stellen ausgedrückt verlanget, als die III Regel geben würde. Man schreibt zum Dividendo so viele Nullen hinzu, als man für gut findet, (diese können auch, weil es einerley ist, dem letzten Rest beygefüget werden). Es läst sich nemlich allemahl zum voraus absehen, wie viele Decimal-Stellen man im Quotienten erhalten wird, weil es jederzeit so viele sind, als im Dividendo mehr denn im Divisor vorkommen. Je mehr Decimal-Stellen man im Quotienten berechnet, desto genauer erhält man denselben, und zuweilen völlig genau, wenn alles aufgehet. Dies erfolgt bey dem letzten Exempel würklich, wenn man dem Dividendo drey Nullen beyfügt, wie nachstehende Berechnung zeiget.

2,3340000	1,45875.
1,6	
73	
16	
64	
94	
16	
80	
140	
16	
128	
120	
16	
112	
80	
16	
80	
0	

In andern Fällen aber erhält man den Quotienten nie völlig genau in Decimal-Theilen, so lange noch ein Rest bleibt.

Dieser Rest, als der Zehler des noch anzuhängenden Bruchs, ist nie größer als der Divisor, (wenn hier nach der 1 Regel, die Zahlen noch als ganze Zahlen angesehen werden). Für jede folgende Decimalstelle des Quotienten wird der Nenner des anzuhängenden Bruchs zehnmahl größer, also wird dieser Bruch viel kleiner, als er vorher war. Er ist nemlich nie so groß, als eine ganze Einheit von eben der Ordnung seyn würde, wozu die letzte Decimal-

Ziffer

Ziffer des Quotienten gehöret. Wenn man demnach mit der Division so lange fort fährt, bis man auf so kleine Decimal-Ziffern komt, die man in der Ausübung aus der Acht lassen kan: so ist man auch um so mehr berechtiget, den letzten noch anzuhängenden Bruch wegzulassen.

137 §.

Einen eigentlichen Bruch durch Decimal-Brüche auszudrücken.

Aufl. Man bemerke die niedrigste Ziffer des Zehlers mit dem Zeichen der Einer, dafern der Zehler nicht schon selbst Decimal-Stellen enthält: so erhält man die Freyheit, rechter Hand so viele Nullen, als man will, anzuhängen, ohne daß sich die Größe des Zehlers ändert (131 §). Hierauf dividire man den Zehler durch den Nenner nach den Regeln des vorig. §: so wird man den Quotienten, welcher mit dem Werthe des Bruches einerley ist, entweder genau, oder doch wenigstens so nahe, als man will, in Decimal-Theilen erhalten.

Exempel.

1.0	0,5	4,0	0,8	3.00	0,75
2		5		4	
10		40		28	
0		0		20	
				4	
				20	
				0	

2,000	0,666 $\frac{2}{3000}$	7,000	0,777 $\frac{7}{9000}$
3		9	
18		63	
20		70	
3		9	
18		63	
20		70	
3		9	
18		63	
2		7	

Es fält sogleich in die Augen, daß in den beyden letzten Exempeln nothwendig allemahl ein Rest bleiben müste, woraus also erhellet, daß sich nicht jeder Bruch genau in zehntheilichten Brüchen ausdrücken lasse. Wenn man demnach in solchen Fällen die Einheit in 10, oder 100, oder 1000 Theile, u. s. f. eintheilt, so daß die Anzahl der Theile ein multiplum der 10 mit sich selbst ist, und man macht auch diese Anzahl der Theile so groß, wie man will: so wird doch nie eine bestimte Menge derselben zusammen genommen eben so viel von der Einheit ausmachen, als der gegebene Bruch; so erhält man im ersten Exempel nie zwey Drittheile, und im zweyten nie sieben neuntheile der Einheit. Je mehr Decimalstellen man inzwischen berechnet, desto genauer wird der Werth des Bruchs in Decimal-Theilen ausgedrückt, und der Irthum, den man mit Weglassung des noch anzuhängenden Bruchs begehet, kan kleiner werden, als jede Größe, die sich angeben läst. Dies letztere werden folgende Sätze deutlicher ins Licht setzen.

138 §.

Wenn zwo Größen A und *e* ungleich, und so sehr als man will unterschieden sind; so kan man die kleinere *e* so oft zu sich selbst addiren, daß die Summe endlich gröſſer als *A* wird: oder welches einerley ist, man kan *e* mit einer so großen ganzen Zahl *m* multipliciren, daß das Product *me* gröſſer als *A* wird, *e* sey so klein, als man wolle, dafern *e* nur noch eine Größe, und mit A von einerley Art ist.

139 §.

Wenn demnach eine Größe *A* durch eine ganze Zahl *m* dividirt wird: so kan man diese Zahl *m* allemahl so groß nehmen, daß $\frac{A}{m}$ kleiner wird, als jede andre Größe *e*, die sich angeben läst, sie sey so klein, als man will.

Beweis. Es sey *e* eine Größe, so klein, als man will: so nehme man *e* so oft, daß die Summe oder das Product $me \rhd A$ wird (138 §). Ist dies geschehen, so hat man $e \rhd \frac{A}{m}$ (47 §), oder $\frac{A}{m} \lhd e$.

140 §.

Diese beyden letzten Sätze lassen sich leicht auf den 136 und 137 §. anwenden. Der dem Quotienten beyzufügende Bruch ist allemahl ein gebrochner Bruch, dessen Zehler kleiner, als 1, sein Nenner aber, ein multiplum von 10 ist, welches letztere so groß werden kan, als man will. Wenn also der Zehler dieses gebrochnen Bruchs A ist, und sein Nenner *m*: so ist *m* entweder 10, oder 100, oder 1000

u. s. f. Verlangt man nun dieser Bruch soll kleiner werden, als e, wo e z. E. ein Millionentheilchen, Billionentheilchen u. s. f. des ganzen bedeuten kan: so darf man nur so lange fortrechnen, bis $m >$ als eine Million, Billion u. s. f. wird, oder welches einerley ist, bis $me > 1$ wird. Ist dies geschehen, so ist auch $me > A$, weil $A < 1$ seyn muß, folglich $\frac{A}{m} < e$.

141 §.

Wenn man mit solchen Brüchen, die nicht völlig genau in Decimal-Theilen ausgedrückt sind, dahin denn alle nach den Regeln des 135 und 136 § berechnete Quotienten gehören, wenn der letzte noch anzuhängende Bruch weggelassen ist, aufs neue Rechnungen vornimt; so können die Resultate nicht genau herauskommen. Sie werden mehr oder weniger unrichtig seyn, nachdem man jene Quotienten mehr oder weniger genau berechnet hat. Ob man nun gleich in der Anwendung mit diesen nicht ganz genau richtigen Resultaten in den meisten Fällen zufrieden seyn kan: so muß man dennoch die Prüfung, wie weit sie richtig sind, anstellen, und die Größe des Irthums schätzen können.

Bey der Addition zwoer Zahlen von dieser Art kan die letzte Ziffer schon unrichtig seyn, wenn an den summirten Zahlen gleichviel Decimal-Stellen hängen. Z. E.

$\frac{2}{3} = 0.666666$ rc.	$\frac{7}{9} = 0.777777$ rc.
$\frac{1}{3} = 0.333333$ rc.	$\frac{2}{3} = 0.666666$ rc.
$1 = 0.999999$ rc.	$1\frac{3}{9} = 1,444443$ rc.

Im

Im ersten Exempel sind alle Ziffern der Summe richtig, im zweyten aber ist die niedrigste Ziffer zu klein, wovon die Ursache leicht in die Augen fält. Hätte man nemlich in jeder summirten Zahl noch eine Ziffer mehr genommen: so wäre in der siebenden Decimal-Stelle die Summe 13 geworden, und dies hätte die sechste Decimal-Stelle der Summe um eins vergrößert. Im ersten Exempel wäre dies nicht geschehen.

Aus einer ähnlichen Ursache kan bey der Subtraction die letzte Ziffer im Rest zu groß herauskommen. So findet man durch die Subtraction.

$\frac{13}{9} = 1{,}444444$ rc.	$\frac{7}{9} = 0{,}777777$ rc.
$\frac{7}{9} = 0{,}777777$ rc.	$\frac{1}{3} = 0{,}333333$ rc.
$\frac{2}{3} = 0{,}666667$ rc.	$\frac{4}{9} = 0{,}444444$ rc.

Aber im ersten Exempel ist die letzte Ziffer des Restes um 1 zu groß, weil beym subtrahiren in der siebenden Decimal-Stelle, wenn sie ausgedrückt wäre von der Ziffer 4 in der sechsten Stelle 1 wäre weggeborgt worden. Im zweyten Exempel fält diese Ursache weg, und es kommen alle Ziffern des Restes richtig heraus.

142 §.

Bey der Multipliration zwoer Zahlen von der Art, wie im vorigen §, verfahre man wie im 135 § gelehret worden: so läst sich die Prüfung ebenfalls ohne Schwierigkeit anstellen, wie weit die Ziffern des Products richtig sind. Z. E.

$\frac{2}{3} = 0,666666$
$\frac{1}{3} = 0,333333$

0,1999998	
199999	8
19999	98
1999	998
199	9998
19	99998
$\frac{2}{9} = 0,2222217$	77778

Es ergiebt sich leicht, daß hier aufs höchste nur die sechs höchsten Ziffern richtig seyn können, und die siebende gewiß schon zu klein sey. Denn die siebende Ziffer 8 des ersten einzelnen Products ist aus einer ähnlichen Ursache schon zu klein, die bey der Addition im vorig. § statt hatte. Es würde nemlich diese Ziffer nicht 8, sondern 9 geworden seyn, wenn im Multiplicando nur noch eine Stelle mehr genommen wäre. Die Ziffern, welche im Product nach der siebenden folgen, werden um so weniger richtig seyn, weil immer mehr Ziffern in den einzelnen Producten fehlen, die einen Einfluß in die Summe haben würden.

Die siebende Ziffer des Products aber, ist nicht allein aus der Ursache zu klein; weil die siebende im ersten einzelnen Product zu klein ist; sondern auch deswegen, weil in der siebenden Columne unten noch eine Ziffer fehlt, die hinzu gekommen seyn würde, wenn man im Multiplicator eine Ziffer mehr genommen hätte; dies wäre im gegenwärtigen Fall die 1 gewesen.

Endlich drittens erhellet, wenn alles vollständig wäre, daß bey der Addition der achten Columne,

auch

auch mehr würde in mente geblieben, und hiedurch ebenfalls die Summe der siebenden Columne vermehrt worden seyn.

Diese drey Umstände zusammengenommen ergeben, daß wenn alles vollständig wäre, zur siebenden Columne so viel hätte hinzukommen können, daß auch hier bey der Addition ein mehreres in mente geblieben, und hiedurch auch die sechste Ziffer der Summe größer geworden wäre, wie es denn leicht erhellet, daß im Exempel die Ziffer 2 statt 1 hätte herauskommen müssen.

Wenn man diese Sache genauer ansiehet: so nimt man leicht wahr, daß es unnöthig sey, die nach der siebenten Decimalstelle folgenden Ziffern in den einzelnen Producten hinzuschreiben, die im Exempel durch einen Strich von den übrigen abgesondert sind. Man kan sie füglich alle weglassen, und man wird doch das Product bis auf die zwo letzten Ziffern richtig herausbringen. Dies ist der Grund von der so genannten abgekürzten Multiplication, und und man nimt ohne Schwierigkeit wahr, wie sich dies Verfahren in jedem andern ähnlichen Fall anbringen lasse. Z. E.

$7\frac{3}{7} =$

$7\frac{3}{7} = 7{,}4285714$
$3\frac{4}{7} = 3{,}5714285$

$22{,}2857142$
$3{,}71428570$
51999997
742857
29714^{0}
14856
5956
37^{0}

$26{,}53061146$

Man multiplicire hier nemlich mit jeder nechstfolgenden Ziffer des Multiplicators, nach den Zehntheilen, eine Ziffer weniger im Multiplicando, als mit der nechst vorhergehenden. In dem gefundnen Product aber sind die drey letzten Ziffern noch zweifelhaft. Denn in der siebenden Columne konte nicht allein die oberste Ziffer zu klein seyn; sondern es fehlt auch noch unten eine Ziffer. Also kan man nur die fünf ersten Decimal-Stellen für richtig annehmen.

143 §.

Wenn man eine Zahl von dieser Art $26\frac{2}{4}\frac{6}{9} = 26{,}5306122$ durch eine andre ähnliche $7\frac{3}{7} = 7{,}4285714$ dividiren soll, so kan man eine ähnliche **Verkürzung** anbringen. Man läst nemlich bey jeder folgenden Operation von den Ziffern des Divisors die niedrigste weg, da sich dann der Quotient auf folgende Art ergiebt.

$26\frac{26}{49} = 26,53061122$
$7\frac{3}{7} = 7,4285714$
$22,2857142$

$3,5714287 = 3\frac{4}{7}$

$4,2448980$
$7,428571$
$3,7142855$

5306125
$7,42857$
5199999

106126
$7,4285$

31841
$7,428$
29712

2129
$7,42$
1484

645
$7,4$
592

53
7
49

4

Der Grund dieses Verfahrens ergiebt sich leicht, wenn man damit die im vorig. § beschriebene verkürzte Art zu multipliciren vergleicht. Bey Berechnung der einzelnen Producte, läst man aus dem einen Factor nach und nach immer die niedrigste Ziffer

fer weg. Also kan man hier das Dividendum als ein Product ansehen, das durch die Multiplication des Quotienten in den Divisor auf eben die Art entstanden wäre, indem man in dem Factor, der hier den Divisor abgiebt, von den niedrigsten Ziffern eine nach der andern bey der Multiplication weggelassen hätte, welches durch die Vergleichung dieser Berechnung mit der Rechnung des vorigen § deutlich wird.

Im gegenwärtigen Exempel ist die letzte Ziffer des Quotienten nur unrichtig. Aber man siehet wohl, daß man sich in andern Fällen auf die Richtigkeit der beyden letzten Ziffern nie verlassen könne.

Der VIII. Abschnitt.

Von den vier Rechnungs-Arten in genannten Zahlen.

144 §.

Es ist eigentlich kein Geschäfte der theoretischen Rechenkunst, die Anwendung der bisherigen Rechnungs-Regeln zu zeigen. Wer diese Anwendung machen will, muß verschiedene Kentnisse von der Beschaffenheit der Sachen selbst besitzen, die man durch Zahlen auszudrücken gewohnt ist. Manche derselben lernt man gar nicht kennen, wofern man sich nicht mit denjenigen Wissenschaften bekannt macht, die davon besondern Unterricht geben, dahin denn vorzüglich alle Theile der Mathematik gehören.

Mit

Mit vielen hieher gehörigen Kenntnissen wird man versehen, wenn man sich mit den mannigfaltigen Gewerben und Handthierungen des gemeinen Lebens bekannt macht. Einige dieser Kenntnisse haben sich so nothwendig gemacht, daß fast niemand derselben entbehren kan, daher man auch unvermerkt bey den täglichen Geschäften des gemeinen Lebens davon wenigstens einigermaßen unterrichtet wird. Es gehören hieher vorzüglich die Werthe der Münzen, die verschiedene Beschaffenheit der Maaße, der Gewichte, und dergleichen mehr. Deswegen lernt man bey Dingen von dieser Art am leichtesten die Anwendung der bisherigen Rechnungs-Regeln zu machen.

145 §.

Man muß hiebey vor allen Dingen wissen, in wie viele Theile man eine Münze von einem bekannten Werthe, ein bekanntes Maaß, ein bekanntes Gewicht, u. s. f. einzutheilen gewohnt ist, und was diese Theile für Namen führen. Diese Eintheilungen und Namen sind völlig willkührlich, und eben daher ist die große Verschiedenheit entstanden, die hiebey obwaltet. Bey den folgenden Exempeln werden die nachstehenden Eintheilungen gebraucht werden. Ein Thaler gilt 24 Groschen, und ein Groschen 12 Pfenninge. Ein Centner hält 110 Pfund, ein Pfund 16 Unzen, eine Unze 8 Drachmen, eine Drachma 3 Scrupel, ein Scrupel 20 Gran. Eine Ruthe hat 12 Fuß, ein Fuß 12 Zoll, ein Zoll 12 Linien, eine Linie 12 Scrupel. Weil es beym Rechnen weit bequemer ist; so theilen die Mathematiker die Maaße gern in 10 Theile. So hält die Ruthe 10 Fuß, der Fuß 10 Zoll, der Zoll 10 Linien, u. s. f.

146 §.

146 §.

Man ist nicht gewohnt, eine Summe Geldes in lauter Pfenningen, oder Groschen auszudrücken, so wie man ein Gewicht nicht in lauter Gran, eine Länge nicht in lauter Zollen, Linien, oder Scrupel ausdrückt, es müste denn seyn, daß man hiezu eine besondere Ursache hätte. In den allermeisten Fällen drückt man eine Summe kleiner Theile, die einen grössern Theil mehrmahl enthält, durch diese grössern Theile aus. Wenn man demnach beym Rechnen auf eine Anzahl dergleichen kleiner Theile komt, die mehr solche Theile enthält, als auf das nechst grössere Maaß, Gewicht, und auf die nechst grössere Münze u. s. f. gerechnet werden: so drückt man eine solche Zahl gewöhnlich durch die nechst grössere Einheit aus. Weiß man die Anzahl der Theile, die das nechst grössere Maaß, Gewicht, u. d. gl. ausmachen, so darf man nur mit dieser Zahl dividiren. Der Quotient wird ausdrücken, wie viele Einheiten der grösseren Art in der dividirten Zahl enthalten sind: da dann der Rest die noch übrigen Theile der kleinern angiebt (52 §).

Wenn 1 Gr. = $\frac{1}{24}$ Thl.

so sind 327 Gr. = $\frac{327}{24}$ Thl. = 13 Thl. 15 Gr.

Wenn 1 Pf. = $\frac{1}{100}$ Cent.

so sind 4634 Pf. = $\frac{4634}{100}$ C. = 42 C. 14 Pf.

Wenn 1 Fuß = $\frac{1}{12}$ Ruth.

so sind 519 F. = $\frac{519}{12}$ R. = 43 R. 3 F.

Wenn aber 1 F. = $\frac{1}{10}$ R.

so sind 519 F. = 51, 9 R. = 51 R. 9 F.

Dies Verfahren nennet man eine genannte Zahl auf eine andre Benennung, oder einen andern Namen bringen. So sind in den angeführten

Exem=

Exempeln solche Zahlen, die den kleinern Namen hatten, auf größere Namen gebracht.

147 §.

Soll man umgekehrt eine Zahl, die den größern Namen hat, auf einen kleinern Namen bringen, d. i. eine Anzahl der größern Theile durch die darin enthaltenen kleinern Theile ausdrücken: so ergiebt sich von selbst, daß man für jeden größern Theil so viele kleinere rechnen müsse, als dieser größern Theil ausmachen. Diesemnach muß man mit der Anzahl dieser Theile multipliciren (30 §). Man darf also nur auf eine ähnliche Art, wie vorhin, 24 Gr. statt 1 Thl., 110 Pf. statt 1 Cent. u. s. f. schreiben: so ergiebt sich die übrige Rechnung von selbst.

Wenn 1 Thl. = 24 Gr.: so sind 13 Thl. 15 Gr. = 13 × 24 Gr. + 15 Gr. = 327 Gr.

Wenn 1 Centner = 110 Pf.: so sind 42 C. 14 Pf. = 42 × 110 Pf. + 14 Pf. = 4634 Pf.

Wenn 1 Ruthe = 12 Fuß: so sind 43 R. 3 F. = 43 × 12 F. + 3 F. = 519 F.

Wenn aber 1 R. = 10 F.: so sind 51 R. 9 F. = 51,9 R. = 51,9 × 10 F. = 519 F.

148 §.

Es erstreckt sich eben dies Verfahren auch auf gebrochne genannte Zahlen. Man komt nemlich häufig auf Brüche, deren Nenner die Einheit nicht eben so theilt, wie man es sonst gewohnt ist: und es hat weiter keine Schwierigkeit, einen solchen Bruch durch die darin enthaltenen bekannten Theile des Ganzen auszudrücken, wenn man nur wie vorhin statt des Ganzen die Anzahl der darin enthaltenen kleinern Theile schreibt.

So ist $\frac{3}{5}$ Thl. $= \frac{3}{5}$. 24 Gr. $= \frac{72}{5}$ Gr. $= 14\frac{2}{5}$ Gr. und $\frac{2}{5}$ Gr. $= \frac{2}{5}$. 12 Pf. $= \frac{24}{5}$ Pf. $= 4\frac{4}{5}$ Pf.

Ferner $\frac{7}{8}$ C. $= \frac{7}{8}$. 110 Pf. $= \frac{770}{8}$ Pf. $= 96\frac{1}{4}$ Pf. und $\frac{1}{4}$ Pf. $= \frac{1}{4}$. 16 Unzen $= 4$ Unzen.

Eben so $\frac{4}{9}$ R. $= \frac{4}{9}$. 12 F. $= \frac{48}{9}$ F. $= 5\frac{1}{3}$ F. und $\frac{1}{3}$ F. $= \frac{1}{3}$. 12 Zoll $= 4$ Zoll,

oder in Decimal-Theilen.

$\frac{4}{9}$ R. $= 0.444$ rc. R. $= 4$ F. 4 Z. 4 L. rc.

149 §.

Genannte Zahlen zu addiren.

Aufl. Man schreibe diejenigen alle in einer Columne untereinander, die einerley Namen haben, und addire jede Columne besonders.

Man fange aber mit derjenigen Columne an, die den kleinsten Namen hat, und bringe die Summe gleich auf den nechst größern Namen. Die herausgebrachte Zahl, welche den nechst größern Namen hat, addire man mit zur nechst größern Columne, und schreibe den Rest, welcher den kleinern Namen behält, unter der gleichnamigten Columne.

Exempel.

7 C.	86 Pf.	14 Unz.	7 Dr.
4	93	9	5 19 Gran
2	74	12	4 54
	255	37	17 73
	110	16	8 60
	220	32	16 13 Gran
15 C.	35 Pf.	5 Unz.	1 Dr.

48 Thl.	21 Gr.	9 Pf.
29	14	5
7	19	7
	55	21
	24	12
	48	9 Pf.
86 Thl.	7 Gr.	

150 §.

Eine kleinere genannte Zahl von einer grösseren zu subtrahiren.

Aufl. Man schreibe die Zahlen, welche einerley Namen haben, wie vorhin untereinander, und subtrahire jeden Theil der kleinern Zahl, von dem gleichnamigten der größern.

Dafern dieser gleichnamigte Theil der größern Zahl kleiner ist, als diejenige Zahl, welche man davon nach der ersten Regel subtrahiren soll: so borge man von dem Theil, welcher den nechst größern Namen hat, eins weg und rechne dafür so viele Einheiten zur nechst kleinern Columne, als diese geborgte Einheit ausmachen.

Exempel.

				12			
15	Ruth	9	Fuß	3	Zoll	7	Lin.
8		4		10		3	
7	R.	4	F.	5	Z.	4	L.

		24		12			
28	Thl.	14	Gr.	3	Pf.		
19		21		8			
8	Thl.	16	Gr.	7	Pf.		

		109		16			
97	Cent.	0		0			
24	C.	73	Pf.	3	U.		
72	C.	36	Pf.	13	U.		

151 §.

Eine genannte Zahl mit einer ganzen Zahl zu multipliciren.

Aufl. Man multiplicire nach einander die verschiedenen Theile der genannten Zahl, und zwar mache man bey dem Theil, welcher den kleinsten Namen hat, den Anfang, und gehe sodann zu den nechst größern Theilen fort. Allemahl aber bringe man das gefundene Product auf die nechst größere Benennung, wie bey der Addition.

7 Thl. 16 Gr. 5 Pf.

27 27 27

189 112

18 32

11

443 135

24 12

203 15

24 12

192

3 Pf.

207 Thl. 11 Gr.

17 Pf. 14 U. 18 Thl. 11 Gr.

94 94 94

68 56

153 126

84 35

1351 282

16 8

128 24

71 42

16 8

64 40

2 Dr.

1682 C. 7 U.

152 §.

Eine genannte Zahl durch eine ganze Zahl zu dividiren.

Aufl. Man dividire nach einander die Theile der genannten Zahl so, daß man mit demjenigen Theil anfängt, welcher den höchsten Namen hat, und sodann auf die nechst niedrigen fort gehet.

Die Reste bringe man allemahl auf die nechst kleinere Namen (148 §), und rechne sie jedes mahl zum nechst kleinern Theil des Dividendi.

Exempel.

113 Pf. 9 U. 3 Dr.

7 | 16 | 32

43 | 16 Pf. 25 | 3 U. 35 | 5 Dr.
7 7 7
42 21 35
1 4 0

mult. 16 U. mult. 8

32 Dr.

Quot. 16 Pf. 3 U. 5 Dr.

127 Thl. 18 Gr. 11 Pf.

38 | 312 | 312

114 | 3 Thl 330 | 8 Gr. 323 | 8½ Pf.
13 38 38
mlt. 24 304 304
52 26 19
26 mult. 12
312 Gr. 52
26
312 Pf.

Quot. 3 Thl. 8 Gr. 8½ Pf.

153 §.

Eine Zahl wird mit einem Bruch multiplicirt, wenn man sie in den Zehler desselben multiplicirt, und was herauskomt, durch den Nenner dividirt: und man dividirt eine Zahl mit einem Bruch, wenn man sie mit dem umgekehrten Bruch multiplicirt (113 §). Also wird man die beyden letzten Aufgaben auch auflösen können, wenn der Multiplicator, oder Divisor Brüche sind.

Exempel.

38 Pf. mult. $\frac{7}{9}$

15 U. mult. $\frac{7}{9}$

5 Dr. mult. $\frac{7}{9}$

38 Pf. mult. $\frac{7}{9}$

266	105
6	4

109	6 Pf.
16	
96	

13 U.

32	5 U.
45	
9	
45	
0	

35	4 U.
8	
32	

3 Dr.

9	

$\frac{1}{3}$ Dr.

272	Pf.
div. 9	30 Pf.
2	
9	
42	
16	

32 U.

Product. 30 Pf. 5 U. $\frac{1}{3}$ Dr.

17 Thl. 5 Gr. $\frac{7}{8}$ Pf. div. $\frac{5}{8}$

136	40
1	4

44	1 Thl.	56	4 Gr.
24		12	
20 Gr.		48	
		8 Pf.	

137 Thl.

137 | Thl. 20 Gr. 8 Pf.
5 | 27 Thl. 48 | 13 Gr. 36
10 | 68 | 44 | 8 4/5 Pf.
5 | 5
37 | 18 | 40
5 | 5 | 4
35 | 15
2 | 3
24 | 12
48 Gr. | 36 Pf.

Quot. 27 Thl. 13 Gr. 8 4/5 Pf.

154 §.

Die bisherigen Rechnungs-Regeln sind zulänglich, in allen Fällen, wenn aus gegebenen Zahlen andre unbekannte Zahlen gesucht werden sollen, die unbekannten Zahlen zu finden. Sie lehren die einfachen Operationen dieser Wissenschaft, die man aber in vorkommenden Fällen bald so, bald anders mit einander verbinden muß, um die gesuchten Zahlen herauszubringen. Sie machen eigentlich die allererersten Anfangsgründe dieser Wissenschaft, die so genannte Elementar-Rechenkunst aus. Bey verwickelten Rechnungsfragen muß man genauer wissen, wie man mit den gegebenen Zahlen umzugehen habe, welche Rechnungsarten man mit ihnen vornehmen, und in welcher Ordnung dieses geschehen müsse. In den meisten gewöhnlichen Rechenbüchern wird dies alles nur in speciellen Exempeln gewiesen, und dies ist auch nach der Absicht, weswegen diese Bücher aufgesetzt sind, ziemlich zulänglich, dafern anders die Regeln selbst nur deutlich vorge-

tragen, und die Gründe derselben einigermassen auseinander gesetzt werden. Allein, wenn die Rechenkunst als ein Theil der Mathematik betrachtet, und in allen ihren übrigen Theilen hiernechst mit Vortheil angewandt werden soll: so ist nöthig, über die mancherley Arten, wie man die Zahlen mit einander vergleichen, und aus gegebenen Zahlen andre suchen kan, nunmehro so allgemeine Betrachtungen anzustellen, daß man dadurch in den Stand gesetzet wird, in jedem vorkommenden Fall selbst zu beurtheilen, welche von den mannigfaltigen Regeln anzuwenden sey, die in den gewöhnlichen Anweisungen zur Rechenkunst unter so vielerley Namen vorgetragen werden. Ja, diese Untersuchungen müssen so allgemein gemacht werden, daß sie sich auch da anwenden lassen, wo man mit Vergleichungen andrer Größen zu thun hat, die man eben nicht als Zahlen betrachtet.

Der IX. Abschnitt.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

155 §.

Zwo ungleiche Größen werden allemahl um eine gewisse Differenz unterschieden seyn. So ist z. E. $8-5=3$. Ein paar andre Größen können um eben diese Differenz unterschieden seyn. Z. E. $7-4=3$. Man kan also sagen: 8 übertreffe 5 um eben so viel, als 7 die Zahl 4 übertrift, und dies

kan

kan man kurz so ausdrücken: 8 − 5 = 7 − 4. Vier Größen von dieser Art, da nemlich die erste von der zweyten um eine eben so grosse Differenz unterschieden ist, wie die dritte von der vierten, heissen: Arithmetische Proportional-Größen. Auf die Frage: um wie viel 8 von 5 unterschieden sey, muß man eben so antworten, als auf die Frage: um wie viel 7 von 4 unterschieden sey? Und diese Beziehung zwoer Größen gegen einander, vermöge welcher sie um eine gewisse Differenz unterschieden sind, nennt man ihr Arithmetisches Verhältniß gegen einander. Die Größen selbst heissen die Glieder (termini) des Verhältnisses. Es ist demnach einerley, ob man sagt, ein paar Größen A und B sind von einander um eine eben so grosse Differenz unterschieden, wie ein paar andre C und D; oder ob man sagt, das Arithmetische Verhältniß der beyden ersten, sey dem Arithmetischen Verhältniß der beyden letzten gegen einander gleich. Diese Gleichheit zweyer Arithmetischen Verhältnisse, heist eine Arithmetische Proportion, und ihre Glieder sind die Größen selbst, welche die Proportion ausmachen.

156 §.

Das Arithmetische Verhältniß zwoer Größen gegen einander, wird am natürlichsten durch das zwischen beyden gesetzte Zeichen der Subtraction angezeiget, da denn das Zeichen der Gleichheit zwischen beyden gleichen Verhältnissen die Arithmetische Proportion ausdrückt, wie im vor. §. 8 − 5 = 7 − 4. In den Schriften der Ausländer findet man die Arithmetische Proportion auch so bezeichnet: 8. 5 ∴ 7. 4, aber die vorige Art wird in der Folge beybehalten werden.

157 §.

Weil man hier eben nicht besonders darauf siehet, welches von den beyden Gliedern des Verhältnisses das größere, und welches das kleinere sey; sondern eigentlich nur ausdrücken will, daß die beyden ersten Größen von einander um eben so viel, wie die beyden letzten unterschieden sind: so ist es gleichgültig, ob man das größere, oder das kleinere Glied eines Verhältnisses voransetzet. Man kan auch schreiben $5-8=4-7$, und man kan den Ausdruck so erklären: um wie viel 5 kleiner, als 8 ist, um so viel ist auch 4 kleiner, als 7.

Das erste und dritte, imgleichen das zweyte und vierte Glied einer arithmetischen Proportion, werden ihre gleichnamigten Glieder genannt. Also ist es gleich viel, ob die beyden ersten gleichnamigten Glieder größer, oder, ob sie kleiner, als die beyden letzten sind.

158 §.

Die Differenz zwoer Zahlen von einander, wird auch der Name ihres arithmerischen Verhältnisses genannt. Und dieserwegen kan man folgende zwo Regeln festsetzen.

Wenn zwey arithmetische Verhältnisse gleiche Namen haben: so sind die Verhältnisse gleich.

Umgekehrt:

Wenn zwey arithmetische Verhältnisse gleich groß sind: so haben sie gleiche Namen.

Wenn demnach D den Namen des Verhältnisses bedeutet: so siehet man leicht, daß der allgemeine Ausdruck:

$$A+D-A=B+D-B$$

oder auch

$$A-A+D=B-B+D$$

eine jede arithmetische Proportion bezeichnen kan.

159 §.

In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der beyden mitlern Glieder so groß, als die Summe der beyden äussern.

Beweis. Jede arithmetische Proportion läst sich so ausdrücken:

$$A+D-A=B+D-B$$

oder: $A-A+D=B-B+D$ (158 §).

In beyden Fällen hat man $A+B+D=A+D+B$.

160 §.

Es sind drey Größen gegeben, man soll zu ihnen die vierte arithmetische Proportional-Größe finden.

Aufl. Man addire die zweyte zur dritten, und subtrahire von der Summe die erste: so ist der Rest die gesuchte Größe.

Beweis. Wenn A, B, C, die gegebenen Größen sind, und X ist die gesuchte: so soll die Proportion wahr seyn, $A-B=C-X$. Demnach ist $A+X=B+C$ (159 §), also $X=B+C-A$ (28 §).

Exempel.

Es sind die Zahlen, 17, 30, 126 gegeben; so giebt die Rechnung die Zahl 139 und man hat also $17-30=126-139$

126
30

156
17

139

Man

Man siehet leicht, daß die Summe der beyden letzten Zahlen gröſſer, als die erste seyn müsse, sonst würde man nicht subtrahiren können. In der Folge wird zwar der Begrif von der Subtraction erweitert werden: so daß man auch in diesem Fall in einem gewissen Verstande noch subtrahiren kan. Allein diese Untersuchung bleibt zur Zeit noch ausgesetzt.

161 §.

Wenn die Summe zwoer Zahlen $A+F$ eben so groß ist, als die Summe zwoer andern Zahlen $B+C$: so sind allemahl, die zwo Zahlen, welche die eine Summe ausmachen, zwischen den beyden andern mitlere arithmetische Proportional-Zahlen.

Beweis. Weil $A+F=B+C$; so ist $F=B+C-A$ (28 §.) Wenn aber $A-B=C-X$, so ist auch $X=B+C-A$ (160 §). Also $X=F$, und $A-B=C-F$.

162 §.

Wenn die beyden mitlern Glieder einer arithmetischen Proportion gleich groß sind: so heist sie eine stetige Proportion (continua). Von der Art wäre die Proportion $5-8=8-11$. Der allgemeine Ausdruck $A-A+D=B-B+D$ (158 §) läst sich leicht für diesen Fall einrichten, wenn man $A+D=B$ setzt. Nun erhält man $A-A+D=A+D-A+2D$. Und wenn man in dem Ausdruck $A+D-A=B+D-B$ die Gröſse $A=B+D$ setzt: so wird $B+2D-B+D=B+D-B$, welcher Ausdruck mit dem vorigen einerley in umgekehrter Ordnung anzeigt.

163 §.

Eine Proportion von dieser Art hat also nur drey verschiedene Glieder, und das zweyte, welches hier das mitlere heist, komt eigentlich zwey mahl vor.

Die Summe der äussern Glieder ist hier doppelt so groß, als das mitlere (159 §), und aus den beyden ersten wird das dritte gefunden, wenn man das zweyte verdoppelt, und vom Product das erste subtrahirt (160 §). Das doppelte zweyte Glied muß also hier größer, als das erste seyn, aus der im 160 § schon angeführten Ursache.

164 §.

Wenn A und B die beyden ersten Glieder sind: so erhält man auch das dritte, wenn man zum zweyten B den Namen des Verhältnisses $B-A=D$ addirt, dafern B größer als A ist, im Gegentheil aber die Differenz $A-B$ von B subtrahirt. Im ersten Fall werden die drey Größen diese seyn: $A, A+D, A+2D$. Man kan sodann die Differenz D zum dritten Gliede aufs neue addiren: so erhält man vier stetige arithmetische Proportional-Größen. $A, A+D, A+2D, A+3D$ (quatuor continue arithmetice proportionales) da dann die zweyte und dritte die beyden mitlern stetigen arithmetischen Proportional-Größen genannt werden.

Es erhellet, daß man auf ähnliche Art fünf, sechs, und mehr stetige arithmetische Proportional-Größen zuwege bringen könne, wenn man die Differenz jedesmahl wieder zum letzten Gliede addirt. Man erhält auf solche Art eine Reihe von Zahlen, worin jedes Glied zum nechst vorhergehenden einerley arithmetisches Verhältniß hat, und man nennt sie eine

arith-

arithmetische Progreßion. Wäre das zweyte Glied kleiner, als das erste: so müste man die Differenz allemahl subtrahiren, und man erhält sodann eine abnehmende, so wie im ersten Falle eine wachsende arithmetische Progreßion. Dergleichen Progreßionen würden folgende seyn.

4 7 10 13 16 19 22 25 u. s. w.
223 213 203 193 183 173 u. s. w.

165 §.

Es sind zwo Größen gegeben man soll zwischen ihnen eine oder auch mehr mitlere arithmetische Proportional-Zahlen suchen.

I. Aufl. Man addire beyde Größen zusammen und dividire die Summe durch 2, so hat man eine mitlere arithmetische Proportional-Größe zwischen den gegebenen.

So findet man zwischen 123 und 175 die mitlere Zahl 149.

123
175
298
2,
149

Beweis. Wenn A und B die gegebenen Größen sind und X die gesuchte: so soll die Proportion richtig seyn $A-X=X-B$. Demnach wird $2X=A+B$ (163 §) und $X=\frac{1}{2}(A+B)$.

II. Aufl. Wenn A das erste Glied und D die Differenz der Glieder ist: so muß das gesuchte zweyte Glied $X=A+D$ seyn. Demnach wird das dritte Glied $=A+2D$; aber dies ist das gegebene B, also hat man $A+2D=B$. Hieraus folgt, $2D=B-A$, und $D=\frac{1}{2}(B-A)$. Dies zum ersten gegebenen Gliede A addirt, muß also das gesuchte

zweyte

zweyte $X = A + \frac{1}{2}(B - A)$ geben, und hieraus folgt die Regel:

Man addire die halbe Differenz der gegebenen Größen zum ersten Gliede: so ist die Summe die gesuchte mitlere Größe.

Wenn wie vorhin $A = 123$ $B = 175$ ist: so giebt die nebenstehende Rechnung ebenfalls $X = 149$.

B	175
A	123
B−A	52
	2,
$\frac{1}{2}(B-A)$	26
	149

Sollte aber das erste Glied A größer, als das letzte gegebene B seyn: so muß man die halbe Differenz der gegebenen Größen $\frac{1}{2}(A-B)$ vom ersten Gliede A subtrahiren. Denn ist D die Differenz der Glieder: so ist in diesem Fall $X = A - D$, und $B = A - 2D$ (164 §). Hieraus folgt, $B + 2D = A$, und $2D = A - B$, also $D = \frac{1}{2}(A-B)$ und $X = A - \frac{1}{2}(A-B)$.

Wenn $A = 396$, und $B = 217$: so giebt die beygefügte Rechnung $X = 306\frac{1}{2}$.

A	396
B	217
	179
	2,
$\frac{1}{2}(A-B)$	$89\frac{1}{2}$
X	$306\frac{1}{2}$

Soll man zwischen zwoen Größen mehr als eine mitlere arithmetische Proportional-Größe suchen: so komt es nur darauf an, die erste davon zu finden, weil sich daraus die übrigen von selbst ergeben. Diese ist allemahl das zweyte Glied der Progreßion, wenn sie durch die mitlere Glieder vollständig gemacht ist, und es folgt nach dem ersten Gliede immer ein Glied mehr, als man mitlere Glieder sucht, weil das letzte hinzukomt.

Es sey A das erste, B das zweyte, V das letzte Glied, D die Differenz der Glieder, und man setze, daß n Glieder nach dem ersten folgen sollen: so ist $B = A + D$ und $V = A + nD$ (164 §) vorausgesetzt, daß die Progreßion wachse. Also wird $nD = V - A$, und $D = \frac{1}{n}(V - A)$ dies giebt $B = A + \frac{1}{n}(V - A)$. Hiezu D addirt giebt das dritte, und abermahl D addirt giebt das vierte, u. s. f. bis man auf V komt. Dies giebt die Regel:

Man dividire die Differenz des ersten und letzten Gliedes durch die Zahl der Glieder die nach dem ersten in der Progreßion folgen sollen, also durch eine Zahl, die um 1 größer ist, als die Anzahl der gesuchten mitlern Größen. Der Quotient zum ersten Gliede addirt giebt das erste der mitlern Glieder, woraus die übrigen nach dem 164 § folgen.

Wenn zwischen 4 und 25 sechs mitlere Glieder gesucht werden sollen: so giebt die neben stehende Rechnung das erste gesuchte = 7 und die sechs gesuchten sind:

7 10 13 16 19 22

V	25
A	4
V − A	21
n	7
$\frac{1}{n}(V-A)$	3
B	7

Wenn V < A ist: so muß die Progreßion abnehmen. Man dividirt also nun die Differenz dieser Größen $A - V$ noch mit eben der Zahl, wie vorhin, und subtrahirt den Quotienten vom ersten Gliede A, um das zweyte Glied der Progreßion, oder das erste gesuchte mitlere zu erhalten.

Denn es ist nun $B = A - D$ und $V = A - nD$ (164 §). Also $nD + V = A$, und $nD = A - V$, folglich $D = \frac{1}{n}(A - V)$ und $B = A - \frac{1}{n}(A - V)$.

Soll

Soll man zwischen 413 und 341 sieben mitlere Zahlen suchen: so giebt die beygefügte Berechnung die erste gesuchte = 404 und alle sieben gesuchte sind:

404 395 386 377 368 359 350.

A 413
V 341
8) 72
$\frac{1}{8}$(A—V) 9
B 404

166 §.

Man kan ein paar Zahlen, und überhaupt ein paar Größen, von welcher Art sie auch seyn mögen, noch auf eine andre Art, als vorhin geschehen ist, mit einander vergleichen. Man kan fragen: wie groß eine Zahl gegen die andre oder überhaupt eine Größe gegen eine andre sey, die mit ihr von einerley Art ist? Wir fragen eigentlich allemahl so, wenn wir wissen wollen, wie groß eine Sache sey, und dabey verlangen, daß man uns die Größe der Sache durch Worte bekannt machen solle, ohne sie selbst vorzuzeigen. Legt mir jemand die Frage vor: wie groß ist eine Elle? so muß ich ihm entweder eine Schnur, einen Stab, oder etwas dergleichen vorzeigen, das die Länge einer Elle hat, oder ich muß die Länge der Elle mit einer ihm sonst bekannten Länge vergleichen, und anzeigen, wie groß die Länge der Elle gegen diese sonst bekannte Länge sey. Antworte ich: Eine Elle sey zweene Füsse lang; so setze ich voraus, daß der Fragende die Länge eines Fußes kenne. Sonst müste er weiter fragen, wie lang ist denn ein Fuß? Frägt jemand: wie viel gilt ein Thaler? und ich antworte: $1\frac{1}{2}$ Gulden; so setze ich voraus, daß dem andern der Werth eines Guldens bekannt sey.

167 §.

Diese Größe der einen Sache gegen die andre, giebt man gewöhnlich durch eine solche Zahl an, welche ausdrückt, wie vielmahl die eine derselben die andre in sich enthalte.

Man muß aber hiebey diese Redensart in dem allgemeinen Verstande nehmen, welcher nicht allein im 30 §; sondern auch im 106 §. erklärt worden. Ist würklich die eine Sache in der andern genau etliche mahl, als ein aliquoter Theil enthalten; so läst sich die Größe der einen gegen die andre durch eine ganze Zahl ausdrücken. Wenn man z. E. sagt: Eine Elle ist zweene Füße lang. Ist aber die eine in der andern nicht genau etliche mahl ganz enthalten, wohl aber ein gewisser aliquoter Theil derselben: so läst sich die Größe der einen gegen die andre durch einen Bruch ausdrücken, der einen gewissen aliquoten Theil der Einheit so oft enthält, als ein ähnlicher aliquoter Theil der einen Sache, in der andern enthalten ist. Sagt man z. E. ein Thaler ist $1\frac{1}{2}$ Gulden, oder $\frac{3}{2}$ Gulden, so ist die Hälfte der Einheit im Bruche $\frac{3}{2}$ dreymahl eben so, wie die Hälfte des Guldens im Thaler dreymahl enthalten.

168 §.

Auf eben die Art kan man nun auch ein paar Zahlen mit einander vergleichen. So kan man sagen, 12 sey dreymahl so groß als 4, 20 sey $3\frac{1}{3}$ mahl oder $\frac{1}{3}0$ mahl so groß als 6 u. s. f. Die Größe einer Zahl, oder irgend einer sonstigen Größe B gegen eine andre A heist das geometrische Verhältniß von B gegen A. Wenn nun eine Zahl *m* ausdrückt, wie groß B gegen A sey, oder wie vielmahl B die andre

dre A in sich enthalte: so heist *m* der Exponent des Verhältnisses von *B* gegen *A*. So ist 3 des Verhältnisses 12 zu 4, und $\frac{1}{3}^{0}$ des Verhältnisses 20 zu 6 Exponent. Die alten Geometer haben allemahl das geometrische Verhältniß verstanden, wenn sie das Wort Verhältniß (ratio), allein gebrauchen, und es wird auch hier in der Folge allemahl das geometrische Verhältniß verstanden werden, wenn gleich das Beywort Geometrisch der Kürze wegen weggelassen wird.

169 §.

Die beyden Zahlen oder Größen, deren Größe gegen einander der Exponent des Verhältnisses ausdrückt, heissen die Glieder des Verhältnisses, und man betrachtet eines von beyden als das vorhergehende, das andre als das nachfolgende Glied. Die Ordnung ist an sich willkührlich. Man kan fragen: wie groß B gegen A sey? man kan auch umgekehrt fragen: wie groß A gegen B sey? Wenn der Exponent *m* ausdrückt, wie vielmahl eine Zahl B eine andre Zahl A enthalte: so ist B:A = *m*, oder der Exponent ist der Quotient, welcher gefunden wird, wenn man *B* durch *A* dividirt (50. 120 §). Dies ist die Ursache, weswegen man das Verhältniß von B zu A durch das zwischen beyden gesetzte Zeichen der Division (:) auf die Art bezeichnet B:A.

170 §.

Wenn eine Größe B gegen A eben so groß ist, als eine dritte D gegen eine vierte C; oder, wenn eine Zahl B die zweyte A so viel mahl enthält, als eine dritte D die vierte C: so ist das Verhältniß B:A

eben so groß als das Verhältniß D:C, und diese Gleichheit zwoer Verhältnisse heist eine geometrische Proportion: oder aus der im 168 § angeführten Ursache schlechthin eine Proportion. Die Größen B, A, D, C heissen die Glieder der Proportion, oder auch geometrische Proportional-Größen. Das erste und dritte, imgleichen das zweyte und vierte, werden gleichnamigte Glieder genannt. Am natürlichsten bezeichnet also der Ausdruck B:A=D:C eine geometrische Proportion, denn dies deutet an, es sey das Verhältniß B:A dem Verhältniß D:C gleich.

Man kan auch so schreiben $\frac{B}{A} = \frac{D}{C}$ (58. 123 §).

In den Schriften der Ausländer wird diese Proportion so bezeichnet B. A::D.C.

171 §.

Es ist einerley, ob man schreibt B:A=D:C; oder ob man die Ordnung der gleichnamigten Glieder umkehrt, und sie so setzet: A:B=C:D. Man siehet leicht, daß eines eine Folge vom andern sey.

Denn ist $\frac{B}{A} = \frac{D}{C}$: so ist $\frac{1}{B:A} = \frac{1}{D:C}$ (119 §), oder $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ (113 §), das ist aber eben so viel, als A:B=C:D.

172 §.

Weil der Exponent des Verhältnisses B:A mit dem Quotienten $\frac{B}{A}$, und der Exponent des Verhältnisses D:C mit dem Quotienten $\frac{D}{C}$ einerley ist, so

er-

erhellet daraus die Richtigkeit folgender Sätze:

Wenn zwey Verhältnisse gleiche Exponenten haben, so sind sie gleich groß.

Umgekehrt: Gleiche Verhältnisse haben gleiche Exponenten.

Ist $\frac{B}{A} = m$, so muß auch $\frac{D}{C} = m$ seyn, wenn die Proportion $B:A = D:C$ richtig seyn soll. Weil also $B = mA$, und $D = mC$ wird (43. 112 §), so läst sich jede geometrische Proportion allgemein so ausdrücken: $mA:A = mC:C$, oder auch $A:mA = C:mC$ (171 §). Der Buchstab m kan hier sowohl eine ganze Zahl, als auch einen Bruch bedeuten.

173 §.

Wenn man die beyden Glieder eines Verhältnisses $A:B$, mit einerley Zahl N multiplicirt, oder dividirt; so bleibt das Verhältniß der Producte $A.N:B.N.$, oder Quotienten $\frac{A}{N} : \frac{B}{N}$ mit dem vorigen $A:B$ einerley.

Beweis. Denn die Quotienten $\frac{B.N.}{A.N.}$ und $\frac{B:N}{A:N}$ sind dem Quotienten $\frac{B}{A}$ gleich (64. 123 §). Also haben die Verhältnisse $A.N:B.N$, $\frac{A}{N} : \frac{B}{N}$, $A:B$ gleiche Exponenten (169 §), und sind gleich groß.

Ist also ein Verhältnis durch zwo ganze Zahlen ausgedrückt; so kan man nach dem 85 § ihr grösstes gemeines Maaß suchen, und beyde damit dividiren:

auf solche Art wird das Verhältnis durch seine kleinsten Zahlen ausgedrückt.

Man kan aber jedes Verhältnis zwoer Zahlen gegen einander durch zwo ganze Zahlen ausdrücken. Denn wenn die Glieder des Verhältnisses Brüche sind, so darf man nur beyde mit dem Product beyder Nenner multipliciren. So ist $\frac{3}{5}:\frac{7}{8}=3\times 8:7\times 5=24:35$, und $9:\frac{7}{8}=9\times 8:7=72:7$. Daß sich eben dies auch auf gebrochne Brüche erstrecke, erhellet aus dem 123 §.

Wenn demnach gleiche Zahlen durch ungleiche Zahlen dividirt werden, so verhalten sich die Quotienten umgekehrt, wie die Divisores. Es ist nemlich $\frac{A}{m}:\frac{A}{n}=An:Am=n:m$.

174 §.

Wenn man die Glieder zwoer Proportionen in der Ordnung, wie sie folgen, durch einander multiplicirt, oder dividirt: so sind die Producte, oder Quotienten einander proportional.

Beweis. Man kan beyde Proportionen allgemein so ausdrücken:

$$A:nA=B:nB$$

und

$$C:mC=D:mD.$$

Nun ist $A\times C:n\times m\times A\times C=B\times D:n\times m\times B\times D$, deswegen eine richtige Proportion, weil der Exponent beyder Verhältnisse $=n\times m$ ist. Auch ist $\frac{A}{C}:\frac{n}{m}\times\frac{A}{C}=\frac{B}{D}:\frac{n}{m}\times\frac{B}{D}$ deswegen eine

rich-

richtige Proportion, weil beyder Verhältnisse Exponent $= \frac{n}{m}$ ist (168 §).

Der erste Satz bleibt noch richtig, wenn gleich die Glieder mehrer als zwoer Proportionen nach der Ordnung in einander multiplicirt werden, und der Beweis läst sich leicht auf diesen Fall anwenden.

175 §.

Es sind drey Zahlen A, B, C gegeben, man soll zu ihnen die vierte Proportional-Zahl finden.

I. Aufl. Man dividire die zweyte B durch die erste A, und multiplicire den Quotienten $\frac{B}{A}$ durch die dritte C: so ist das Product $\frac{B}{A} \times C$ die gesuchte Zahl.

Beweis. Es sey $\frac{B}{A} = m$, und D die gesuchte Zahl: so muß auch $\frac{D}{C} = m$ seyn (172 §).

Also ist $D = m\,C$ oder $D = \frac{B}{A} \times C$.

II. Aufl. Man multiplicire die zweyte B und dritte C in einander, und dividire das Product durch die erste A: so ist $\frac{B \times C}{A}$ die gesuchte Zahl.

Beweis. Diese vierte Zahl ist vermöge des geführten

führten Beweises $= \frac{B}{A} \times C$ und $\frac{B}{A} \times C$ ist $=$ $\frac{B \times C}{A}$ (104. 108. 116 §).

176 §.

Wenn also ein Product zwoer Zahlen $B \times C$ durch eine dritte A dividirt, den Quotienten $\frac{B \times C}{A} = D$ giebt: so ist allemahl $A : B = C : D$. Denn die vierte Proportional-Zahl zu A, B, C ist $\frac{B \times C}{A}$ (175 §) also ist sie $= D$.

Aus $\frac{B \times C}{A} = D$ folgt, es sey auch $\frac{C \times B}{A} = D$ und $\frac{C}{A} = \frac{D}{B}$, oder $A : C = B : D$. Demnach kan man in jeder Proportion die Ordnung der beyden mitlern Glieder verwechseln, wenn alle vier Glieder abstracte Zahlen, oder wenigstens genannte Zahlen von einerley Art sind.

177 §.

In jeder Proportion ist das Product der mitlern Glieder, dem Product der beyden äussern gleich.

Und wenn zwey Producte gleich groß sind: so sind die beyden Factoren des einen Products zwischen beyden Factoren des andern mitlere Proportional-Zahlen.

Beweis des 1. S. Wenn $A : B = C : D$: so

ist $D = \frac{B \times C}{A}$ (175 §). Also $A \times D = B \times C$ (32. 110 §).

Beweis des 2. S. Wenn aber $A \times D = B \times C$: so ist $D = \frac{B \times C}{A}$ (44. 119 §). Also $A : B = C : D$.

178 §.

Wenn die beyden mitlern Glieder einer geometrischen Proportion gleich groß sind: so heist sie eine stetige Proportion (continua). Setzt man in dem allgemeinen Ausdruck $A : mA = C : mC$ (172 §). $mA = C$: so erhält man für die stetige Proportion $A : mA = mA : mmA$.

Eine Proportion von dieser Art hat demnach nur drey verschiedene Glieder, und das zweyte, welches das mitlere heist, komt zweymahl vor.

Das Product des mitlern Gliedes mit sich selbst ist dem Product der äussern Glieder gleich, und man findet zu zwoen Zahlen die dritte geometrische Proportional-Zahl, wenn man das Product der zweyten Zahl mit sich selbst durch die erste Zahl dividirt (175 §).

179 §.

Wenn A und B zwo Zahlen sind: so findet man auch zu ihnen die dritte Proportional-Zahl, wenn man die zweyte B in den Quotienten $\frac{B}{A}$ multiplicirt (175 §) und man erhält, wie im 178 § die drey stetigen Proportionalzahlen A, mA, mmA, wenn

$\frac{B}{A} = m$ ist. Man kan nun das dritte Glied mit dem Exponenten m aufs neue multipliciren: so erhält man vier sterige geometrische Proportional-Zahlen A, mA, mmA, mmmA (quatuor continue proportionales). Da dann die zweyte und dritte die beyden mitlern stetigen Proportional-Zahlen heissen.

Es fält leicht in die Augen, daß man auf ähnliche Art, fünf, sechs und mehr stetige Proportional-Zahlen, so viel man will, zuwege bringen könne. Man darf nur den Exponenten jedesmahl wieder in das vorige Glied multipliciren. Auf solche Art erhält man eine Reihe von Zahlen, worin jedes Glied zum nechst vorhergehenden einerley geometrisches Verhältniß hat, und man nennt sie eine geometrische Progreßion. Wenn der Exponent eine ganze Zahl, oder uneigentlicher Bruch ist: so wird es eine wachsende, oder steigende Progreßion, eine abnehmende aber, wenn der Exponent ein eigentlicher Bruch ist.

180 §.

Ein Product zweener gleich großer Factoren heist die Quadrat-Zahl eines jeden dieser beyden Factoren, und ein jeder Factor heist die Quadrat-Wurzel dieses Products. Ein Product dreyer gleich grossen Factoren in einander, heist die Cubik-Zahl, oder der Würfel eines jeden Factors, und jeder Factor die Cubik-Wurzel des Products. So ist 4 die Quadratzahl von 2, und 2 die Quadrat-Wurzel aus 4. Die Cubikzahl von 2 ist 8, und aus 8 ist 2 die Cubik-Wurzel.

181

181 §.

Man schreibt die Quadratzahl von einer gegebenen Wurzel auf folgende Art. Oben rechter Hand an der gegebenen Wurzel, z. E. 5 setzt man die Ziffer 2, etwas kleiner, als die Ziffern der Wurzel: so daß z. E. 5^2 eben so viel ist, als $5 \times 5 = 25$. Diese kleinere Ziffer 2 zeigt nemlich an, es sey ein Product zweener gleichen Factoren gemeint, wovon jeder so groß ist, als die dabey stehende Wurzel. Auf eben die Art bedeutet 5^3 die Cubikzahl von 5 oder das Product $5 \times 5 \times 5. = 125$. Die kleine Ziffer 3 drückt aus, es sey ein Product dreyer gleichen Factoren zu machen, wovon jeder so groß, als die dabey stehende Zahl seyn soll.

Auf ähnliche Art läst sich ein jedes Product mehrer gleicher Factoren bezeichnen: so ist, z. E. 7^6 so viel als $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$ u. s. f. Solche Producte heissen überhaupt **Potenzen** oder **Dignitäten** des Factors, der durch wiederholte Multiplication mit sich selbst, das Product hervor bringt; und jede Potenz hat den Namen von der Anzahl ihrer gleichen Factoren. So ist 7^6 die sechste Dignität von 7.

182 §.

Umgekehrt bedeutet das Zeichen $\sqrt{}$ (welches nichts anders, als ein etwas verzogner Buchstab r ist) die Quadrat-Wurzel aus der Zahl, welcher man es voransetzt. So ist $\sqrt{4}$ eben so viel als 2. Wenn man über diesem $\sqrt{}$ die Ziffer 3 setzt, etwas kleiner, als die unter dem Zeichen gesetzte: so bedeutet das Zeichen $\sqrt[3]{}$ die Cubikwurzel aus der Zahl, der man es voransetzt. Demnach ist $\sqrt[3]{8}$ so viel, als 2, $\sqrt[3]{125}$ so viel, als 5 u. s. f.

Bey den übrigen Potenzen wird dies Zeichen auf eine ähnliche Art gebraucht, welches unten ausführlicher gezeigt werden soll. Die gegenwärtige Untersuchung wird nur auf die Quadrat- und Cubikzahlen als die zweyte und dritte Dignität eingeschränket seyn.

183 §.

Wenn zwo Zahlen gleich sind: so sind ihre Quadrat- und Cubikzahlen gleich, auch ist die Quadrat- und Cubikzahl einer größern Wurzel größer, als die Quadrat- und Cubikzahl der kleinern (32. 110 §).

Umgekehrt also müssen auch die Quadrat- und Cubik-Wurzeln, aus gleichen Zahlen gleich groß, die Quadrat- und Cubik-Wurzel der größern Zahl aber größer seyn, als die Quadrat- und Cubikwurzel einer kleinern Zahl.

184 §.

Die Quadrat- und Cubikzahl einer ganzen Zahl ist ebenfalls eine ganze Zahl, und größer als die Wurzel. Die Quadrat- und Cubikzahl einer gebrochnen Zahl ist ein Bruch, dessen Zehler und Nenner die Quadrat- oder Cubikzahl des Zehlers und Nenners der Wurzel ist (115 §). Daher ist die Quadrat- und Cubikzahl eines eigentlichen Bruchs, ebenfalls ein eigentlicher Bruch und kleiner als die Wurzel (106 §).

185 §.

Also ist die Quadrat- und Cubik-Wurzel aus einem Bruch, ebenfalls ein Bruch, dessen Zehler und Nenner die Quadrat- oder Cubik-Wurzel vom Zehler und Nenner jenes Bruchs ist. Es sey $N = \frac{r^a}{r^b}$

so

so ist $N^2 = \frac{a}{b}$ (184 §) und $N = r\frac{a}{b}$, also $r\frac{a}{b} = \frac{ra}{rb}$.

Ist $N = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$: so ist $N^3 = \frac{a}{b}$, und $N = \sqrt[3]{r}\frac{a}{b}$, also $\sqrt[3]{r}\frac{a}{b} = \frac{\sqrt[3]{r}a}{\sqrt[3]{r}b}$.

186 §.

Die Quadrat- oder Cubik-Zahl eines Productes ist das Product aus den Quadrat- oder Cubikzahlen der Factoren. Denn ist $N = abc$; so ist $N^2 = abc\ abc = aa\ bb\ cc$ (117 §), $= a^2b^2c^2$, und $N^3 = abc\ abc\ abc = aaa\ bbb\ ccc$, $= a^3b^3c^3$.

Also ist umgekehrt die Quadrat- oder Cubik-Wurzel eines Products, ein Product aus den Quadrat- oder Cubikwurzeln der Factoren. Wenn $N = r\,a\,r\,b\,r\,c$ ist: so wird $N^2 = abc$, und $N = r\,abc$, also $r\,abc = r\,a\,r\,b\,r\,c$. Ist aber $N = \sqrt[3]{r}\,a\,\sqrt[3]{r}\,b\,\sqrt[3]{r}\,c$: so wird $N^3 = abc$ und $N = \sqrt[3]{r}\,abc$, also $\sqrt[3]{r}\,abc = \sqrt[3]{r}\,a\,\sqrt[3]{r}\,b\,\sqrt[3]{r}\,c$.

187 §.

In einer stetigen geometrischen Proportion ist das Product der äussern Glieder der Quadratzahl des mitlern gleich (178 §). Und wenn vier Zahlen in einer stetigen Proportion fortgehen: so ist das Product des letzten Gliedes in das Quadrat des ersten so groß, als der Würfel des ersten von den mitlern Gliedern. Wenn nemlich A, mA, m^2A, m^3A diese vier Zahlen sind (179 §), so hat man $A^2 \times m^3A = m^3A^3 = (mA)^3$ (180 §).

Ist

Ist das erste Glied A = 1, so wird bey dreyen stetigen Proportional-Zahlen das letzte Glied die Quadratzahl, und bey vier Zahlen von dieser Art, das letzte Glied die Cubikzahl des zweyten. Demnach ist die Quadrat-Wurzel aus einer Zahl zwischen der Einheit und der Quadrat-Zahl die mittlere Proportional-Zahl, und die Cubik-Wurzel die erste von zwoen mittlern stetigen Proportional-Zahlen zwischen der Einheit und der Cubikzahl.

188 §.

Die Quadrat- und Cubik-Zahl eines uneigentlichen Bruchs, der sich auf keine ganze Zahl bringen läst, sind ebenfalls Zahlen von dieser Art.

Beweis. Es sey der Bruch $\frac{B}{A}$ so beschaffen, wie vorausgesetzt worden, und er sey zugleich durch seine kleinsten Zahlen ausgedrückt. Wenn nun $a, b, c - - k$ die einfachen Factoren sind, woraus B bestehet, und $\alpha, \beta, \gamma \ldots . \eta$ diejenigen, woraus A zusammengesetzt ist: so kan unter den letzten Factoren keiner vorhanden seyn, der einem der ersten gleich wäre (86 §). Nun ist $\frac{B^2}{A^2}$ die Quadratzahl, und $\frac{B^3}{A^3}$ die Cubikzahl des Bruchs $\frac{B}{A}$ und es enthält B^2 jeden Factor von B zweymahl, so wie B^3 jeden dieser Factoren dreymahl, und keine andre. Also kan weder im Quadrat $\frac{B^2}{A^2}$ noch in der Cubikzahl $\frac{B^3}{A^3}$

$\frac{B^3}{A^3}$ der Zehler mit dem Nenner gemeinschaftliche Factoren haben, und deswegen können diese Brüche keine ganze Zahlen seyn (95 §).

Wenn gleich bey diesem Beweise zum Grunde gesetzt worden, daß der Bruch durch seine kleinsten Zahlen ausgedrückt sey: so leidet dennoch dadurch die Allgemeinheit desselben nicht. Man setze, daß $\frac{B}{A} = \frac{mb}{ma}$ und m das gröste gemeine Maaß von B und A sey: so ist $\frac{B^2}{A^2} = \frac{m^2b^2}{m^2a^2} = \frac{b^2}{a^2}$ und $\frac{B^3}{A^3} = \frac{m^3b^3}{m^3a^3} = \frac{b^3}{a^3}$. Wäre demnach $\frac{B^2}{A^2}$ oder $\frac{B^3}{A^3}$ eine ganze Zahl: so wäre auch $\frac{b^2}{a^2}$ und $\frac{b^3}{a^3}$ eine ganze Zahl, welches vermöge des geführten Beweises nicht seyn kan.

189 §.

Wenn die Quadrat- oder Cubik-Wurzel einer ganzen Zahl keine ganze Zahl ist: so kan es auch keine gebrochne Zahl seyn.

Beweis. Denn man mag annehmen, daß sie ein eigentlicher, oder uneigentlicher Bruch sey: so wird in beyden Fällen folgen, daß das Quadrat oder der Würfel ein Bruch von eben der Art sey (184. 188 §), welches mit der Voraussetzung nicht bestehen kan, da es eine ganze Zahl seyn soll. Es sind also folgende Wurzeln z. E. $r2, r3, r5, r6, r7, r8$

$\sqrt[3]{8}$ u. s. f. imgleichen $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[3]{7}$ u. s. f. weder ganze noch gebrochne Zahlen.

148 Solche ganze Zahlen, deren Quadrat- oder Cubik-Wurzeln ganze Zahlen sind, heissen vollkommene Quadrat- und Cubik-Zahlen, die übrigen werden unvollkommene Quadrat- oder Cubik-Zahlen genannt.

Man kan die Größe der Wurzeln aus unvollkommenen Quadrat- und Cubik-Zahlen nicht anders durch Zahlen ausdrücken, wofern man nicht ein paar Grenzen angiebt, zwischen welchen eine solche Wurzel fallen muß. So ist z. E. $2 < \sqrt{7}$ und $3 > \sqrt{7}$. Dies wären die Grenzen dieser Wurzeln in ganzen Zahlen: allein man kan sie in Brüchen einander noch viel näher rücken. Es ist nemlich $2,6 < \sqrt{7}$, aber $2,7 > \sqrt{7}$. Diese Grenzen sind nur um $\frac{1}{10}$ unterschieden, da die vorigen um 1 unterschieden waren. Man findet ohne sonderliche Schwierigkeit ein paar Grenzen die nur um $\frac{1}{100}$ unterschieden sind, wenn man es auf Versuche ankommen läßt. Es wird nemlich $2,64 < \sqrt{7}$ und $2,65 > \sqrt{7}$ befunden werden. Durch Wiederholung dieses Verfahrens kan man also ein paar Grenzen finden, deren Differenz von einander kleiner ist, als jedes gegebene Stück der Einheit (139 §). Die Wurzel selbst ist alsdann von jeder dieser Grenzen noch weniger unterschieden. Beträgt also der Unterschied beyder Grenzen schon einen so kleinen Theil der Einheit, der in der Ausübung unbeträchtlich ist: so wird man jede dieser Grenzen für die Wurzel selbst nehmen können.

nen. So kan man $\sqrt{7} = 2,64$, oder auch $\sqrt{7} = 2,65$ nehmen, in solchen Fällen wenn $\frac{1}{100}$ der Einheit in der Ausübung nicht mehr beträchtlich ist. Denn der Fehler bey jeder Voraussetzung beträgt weniger als $\frac{1}{100}$.

191 §.

Weil eine solche Wurzel sich nie durch einen Bruch ausdrücken läst, man mag die Einheit in so kleine Theile, als man will, theilen (189 §); so muß es gar keinen aliquoten Theil der Einheit geben, welcher zugleich ein aliquoter Theil der Wurzel wäre: da im Gegentheil ein jeder andrer Bruch aus einem aliquoten Theil der Einheit zusammengesetzt ist (53 §). Solche Zahlen, welche sich aus gar keinem aliquoten Theil der Einheit, er mag so klein genommen werden, wie man will, genau zusammen setzen lassen, heissen Irrational-Zahlen: alle übrige aber werden Rational-Zahlen genannt. Demnach sind alle Quadrat- und Cubik-Wurzeln aus unvollkommenen Quadrat- und Cubik-Zahlen Irrational-Zahlen.

192 §.

Zwischen zwoen gegebenen Zahlen eine, oder auch zwo mitlere stetige Proportional-Zahlen zu finden, wenn vorausgesetzt wird, daß man aus jeder gegebenen Zahl die Quadrat- und Cubik-Wurzel ausziehen könne.

Aufl. der I. Aufg. Man multiplicire beyde gegebene Zahlen in einander, und ziehe aus dem Product die Quadrat-Wurzel: so ist diese zwischen beyden die mitlere Proportional-Zahl. Z. E. zwischen 2 und 32 ist $\sqrt{2 \times 32} = \sqrt{64} = 8$ die mitlere Zahl.

Beweis. Wenn A, B, C, stetige Proportional-Zahlen sind, so ist $B^2 = A \times C$ (178 §). Also $B = \sqrt{A \times C}$ (183 §).

Aufl. der 2 Aufg. Man multiplicire das Quadrat der ersten Zahl in die andre, und ziehe aus dem Product die Cubik-Wurzel: so hat man die erste von zwoen mitlern stetigen Proportional-Zahlen, und ihr Quadrat durch die erste dividirt giebt die zwote. Z. E. zwischen 2 und 128 ist die erste Zahl $= \sqrt[3]{4 \times 128} = \sqrt[3]{512} = 8$ und die zwote $= \frac{64}{2} = 32$.

Beweis. Man kan vier stetige Proportional-Zahlen allgemein so ausdrücken: A, mA, m^2A, m^3A (179 §). Nun setze man $mA = B$, $m^2A = C$, $m^3A = D$: so hat man $A^2D = m^3A^3$ und $B^3 = m^3A^3$ (186 §), also $A^2D = B^3$ und $\sqrt[3]{A^2D} = B$ (183 §). Ferner $C = \frac{B^2}{A}$ (178 §).

Der X. Abschnitt.

Von der Regel-Detri, und ihrer Anwendung.

193 §.

Die Regel des 175 §, nach welcher man zu dreyen Zahlen die vierte geometrische Proportional-Zahl sucht, heist die Regel-Detri eigentlich: regula de tribus &c. numeris. Sie heist auch die güldene Regel

Regel (regula aurea), weil sie einen überaus grossen und allgemeinen Nutzen hat, sowohl in der ganzen Mathematik, als auch bey solchen Rechnungsfragen, die im bürgerlichen Leben beym Handel, und allerhand Arten der Handthierung und Gewerbe vorkommen. In den sogenannten Rechen-Büchern wird die Anwendung dieser Regel auf die Rechnungsfragen der letztern Art gewöhnlicher Maaßen sehr weitläuftig gezeiget, und die Sache selbst durch mancherley Arten von Exempel erklärt. Es ist zwar eigentlich nicht die Absicht der mathematischen Rechenkunst diese Anwendung zu zeigen. Weil indessen diese Anwendung einen so mannigfaltigen Nutzen hat: so pfleget man sie in den mathematischen Lehrbüchern nicht ganz zu übergehen, zumahl da die mathematischen Theorien die Sache sehr erleichtern. So wie diese Lehre in den meisten Rechenbüchern vorgetragen wird, ist sie den Anfängern wegen der grossen Menge specieller Regeln, die nur in einzelnen Fällen brauchbar sind, schwer und unangenehm: und eben daher komt es, das verschiedene Jahre damit hingehen, bevor diejenigen einiger Maaßen im Rechnen geübet werden, die keines andern Unterrichtes geniessen. Es wäre freylich eben nicht der beste Weg, wenn man allen jungen Leuten, die zur Handlung, zu Künsten, oder Handwerken vorbereitet werden sollen, die Rechenkunst so vortragen wollte, wie sie in mathematischen Lehrbüchern abgehandelt wird. Bey einem grossen Theil derselben würde man damit gar nicht fortkommen, weil sie oft kaum dazu aufgelegt sind, nach der Erwartung ähnlicher Fälle zu schliessen, geschweige eine lange Reihe aneinander hängender allgemeiner Wahrheiten zu überdenken.

Für solche Lernende ist die Anführung nach der gemeinen Art gut genug. Aber Gelehrte, und überhaupt solche Personen, die ihre Seelenkräfte mehr, als der gemeine Haufe brauchen, können auf einem weit leichtern Wege zu eben dem Ziele gelangen.

194 §.

Allemahl, wenn ein paar Größen von einer gewissen Art, sich eben so wie ein paar Größen verhalten, die zu eben derselben, oder auch zu einer andern Art gehören, läst sich diese Regel-Detri anwenden, falls drey von diesen Größen gegeben sind, und die vierte gesucht wird. Es ist also natürlich, daß man zuförderst wissen müsse, zwischen welchen Größen eine Proportion statt habe, bevor man die Regeln anwenden kan. Die Verhältnisse und Proportionen aber derjenigen Sachen gegen einander, womit wir bey den täglichen Geschäften des gemeinen Lebens zu thun haben, lernt man, wenigstens zum Theil, von Jugend auf, so zu sagen, von selbst kennen. Viele sind durch Gesetze, andre durch eingeführte Gewohnheiten bestimt, davon man nothwendig gehörig unterrichtet seyn muß, bevor man im Stande ist, irgend eine dahin gehörige Rechnungs-Aufgabe aufzulösen. Die vornehmsten hieher gehörigen Fälle, welche bey denen im gemeinen Leben üblichen Rechnungs-Fragen am meisten vorkommen, sollen nun nacheinander auf gewisse Grundregeln gebracht, und jede derselben mit einigen dahin gehörigen Exempeln erläutert werden.

195 §.

Zuförderst gehören hieher alle die Fälle, da man eine genannte Zahl auf einen andern Namen bringen

gen soll, davon die gemeinsten und leichtesten bereits im 146=148 § vorgekommen sind. Die Fälle von dieser Art liessen sich da auflösen, ohne die Sache eben so allgemein zu betrachten, wie hier geschehen kan. Wenn aber überhaupt eine gewisse Menge von Einheiten der einen Benennung so viel ausmacht, als eine andre Menge Einheiten von andrer Benennung: so sieht man leicht, daß die doppelte Anzahl der ersten Art so viel ausmache, als die doppelte Anzahl der andern, und die dreyfache Anzahl der ersten so viel, als die dreyfache Anzahl der andern u. s. f. Allemahl wenn von vier nach einander folgenden Zahlen die erste der dritten, und die zweyte der vierten gleich ist: so sind die vier Zahlen proportional. Dies ist der Grund aller Reductionen der mancherley Maaße, Gewichte, und Münzen, auf andre, wenn man es weiß, wieviel von der einen Art eine gewisse Menge der andern ausmacht.

Exempel.

Wenn $1\frac{1}{2}$ Kayser=Gulden einen Thaler machen, wie viele Thaler machen 194 Kayserfl:? Antwort.

$\frac{3}{2}$ Kayserfl: 194 Fl. = 1 Thl: vierten Zahl, diese ist = 129 $\frac{1}{3}$ Thl.

Wenn 14400 Rheinl. Fuß so viel machen, als 13913 Pariser Fuß, wie viel Rheinl. Fuß machen 328 Pariser Fuß?

13913 P. F: 328 P. F: = 14400 R. F: vierten Zahl.

Also die gesuchte Zahl = $\frac{328 \times 14400}{13913}$ R. F: = 339, 48 Rheinl. Fuß.

196 §.

In den Rechenbüchern wird gewöhnlich die Regel gegeben, man solle den Ansatz so machen:

$\frac{3}{2}$ Kayserfl. geben 1 Thl. wie viel geben 194 Kayserfl.?

Die letzte Zahl nennt man die Frag-Zahl. Uebrigens bleibt die Regel: daß man das Product der beyden letzten Zahlen durch die erste dividiren müsse. Man siehet leicht, daß dies das gesuchte Resultat nicht ändre, weil man in einer Proportion die beyden mitlern Glieder verwechseln kan (176 §), wenn entweder alle Glieder von einerley Art sind, oder als abstracte Zahlen betrachtet werden können. Dies letztere kan hier während der Rechnung geschehen, indem man blos die Größe der vierten Zahl sucht, dafern man nur merkt, wie auch leicht in die Augen fällt, daß die vierte Zahl nicht mit der Fragzahl, sondern mit derjenigen von einerley Art sey, die bey diesem Ansatz unter den dreyen gegebenen die mitlere wird. Es ist diese Art des Ansatzes zwar für solche Lernende am begreiflichsten, die man mit der Theorie verschonen muß, übrigens aber der Beschaffenheit der Sache nicht gemäß.

197 §.

Die Reductionen einer Zahl auf eine andre Benennung kommen bey der Anwendung der Rechenkunst überall sehr häufig vor. Bey den Münzen nennt man dies insbesondre die Wechsel-Reduction und diese macht den ersten Haupttheil der so genannten Wechsel-Rechnung aus. Man muß hiebey von den mannigfaltigen Werthen und Eintheilungen der Münzen, die in verschiedenen Ländern üb-

lich sind, unterrichtet seyn, und eben deswegen aus Büchern, welche die Kaufmännische Rechenkunst ausführlich abhandeln, sich Raths erholen. Da auch die Eintheilungen der Maaße und Gewichte, auch die nur willkührlich festgesetzte Größe derselben sehr verschieden sind: so muß man hievon ebenfalls die nöthige Kenntniß haben. In des Herrn von Clausbergs demonstrativischer Rechenkunst am Ende des dritten Theils, 1061 bis 1105 S. findet man von diesen allen eine ausführliche Nachricht. Die Vergleichung der Längen, Maaße und Gewichte ist auch für die mathematische Rechenkunst interessant, und in solcher Absicht sind folgende Vergleichungs-Tafeln beygefügt.

198 §.

Tafel zur Vergleichung der Fuß-Maaße.

Der Amsterdammer = =	1253
Berner = = =	1309 1/10
Constantinopolitanische =	3120
Cracauische = = =	1580
Dänische = = =	1403 2/5
alte Griechische = =	1350
alte Hebräische = =	1590
Leidensche = =	1390
Leipziger = =	1397
Lissabonische = =	1387
Londensche = =	1350 1/5
3 machen 1 Yard.	
Nürnbergische = =	1346 3/4
Parisische, oder Königl. =	1440
6 machen eine Toise.	

Pragische	=	1338
Rheinländische	=	1391 3/10
neue Römische	=	1320
alte Römische, Vespasian.	=	1571 9/10

625 machen ein Stadium.

Rußische	=	2385 6/7
Schwedische	=	1320
Spanische zu Toledo	=	1206 2/5
Strasburgische	=	1282 3/4
Turinische	=	2270
Venetianische	=	1540
Wienerische	=	1400

Diese Tafel ist aus des Herrn Andreas Böhms Anleitung zur Meßkunst auf dem Felde genommen, woselbst sie unter den am Ende beygefügten die zweyte ist. Die Zahlen drücken das Verhältniß der dabey gesetzten Fuß-Maaße gegen einander aus, so daß z. E. der Amsterd: Berner = 12530 : 13091, woraus sich denn sogleich ergiebt, daß 13091 Amsterd. = 12530 Berner Füßen sind. Und nun läst sich leicht finden, wieviel von der einen Art einer gegebenen Anzahl der andern gleich sey.

199 §.

Herr von Clausberg theilet an dem im 197 § angezogenen Orte eine Vergleichung der Europäischen Gewichte mit, auf deren Richtigkeit man sich deswegen sicher verlassen kan, weil er die Untersuchung mit den Gewichten selbst in natura angestellt hat. E. E. Rath der Stadt Leipzig hatte dem Commercio zum besten die Gewichte der vornehmsten Europäischen Oerter mit nicht geringer Mühe und Kosten angeschaffet, und Herr von Clausberg erhielte

die

die Erlaubniß, eine Untersuchung solcher Gewichte anzustellen, um solche zum Nutzen des Publici bekannt zu machen. Die Resultate seiner Untersuchungen sind folgende.

In Leipzig hat ein Pfund 32 Loth, 1 Loth 4 Quentchen, 1 Quentchen 4 Pfenninge, und 1 Pfenning hat Hr. v. Clausberg, noch in 15 Gran abgetheilet, daß also das ganze Pfund 7680 Gran hält. Jedes Pfund der in nachstehender Tabelle aufgeführten Städte, wiegt nach dem Leipziger Gewicht, an Pf., Loth, Qu., Pfenn. und Gr. so viel, als darneben angezeiget wird.

Tafel zur Vergleichung der Gewichte

	nach dem Leipziger Gewicht.
1 Pf. in Amsterdam	wiegt 1 Pf. 1 L. 3 Q. 1 pf. 10 Gr.
Antwerpen	1 - 0 - 0 - 2 - 0 -
Archangel	0 - 27 - 3 - 3 - 0 -
Aachen	1 - 0 - 0 - 2 - 0 -
Augsburg groß Gew.	1 - 1 - 2 - 3 - 3 -
dito klein Gew.	1 - 0 - 1 - 2 - 6 -
Bologna	0 - 24 - 3 - 1 - 3 -
Botzen	1 - 2 - 1 - 1 - 6 -
Brüssel	1 - 0 - 0 - 2 - 0 -
Breslau	0 - 27 - 3 - 0 - 7 -
Braunschweig	1 - 0 - 0 - 0 - 0 -
Berlin	1 - 0 - 0 - 1 - 2 -
Bremen	1 - 1 - 3 - 0 - 0 -
Bautzen	0 - 29 - 2 - 3 - 5 -
Bourdeaux	1 - 1 - 2 - 3 - 0 -
Constantinopel	2 - 22 - 3 - 3 - 0 -
Cracau	0 - 27 - 3 - 0 - 0 -

nach dem Leipziger Gewicht.

1 Pf. in Cadix	wiegt	0	Pf.	31	L.	2	Q.	0	pf. 0 Gr.
Cölln am Rhein		1	-	0	-	0	-	0	-
Copenhagen		1	-	0	-	2	-	6	-
Danzig		0	-	29	-	3	-	1	- 8 -
Florenz		0	-	23	-	1	-	0	- 1 -
Frankfurt am Mayn		1	-	0	-	0	-	0	- 3 -
Genua		0	-	31	-	2	-	3	- 3 -
Genf		1	-	5	-	3	-	1	- 0 -
Hamburg		1	-	1	-	1	-	0	- 0 -
Königsberg alt Gew.		0	-	26	-	0	-	1	- 0 -
dito neu Gew.		1	-	0	-	0	-	1	- 0 -
London		0	-	30	-	3	-	3	- 9 -
Lissabon		0	-	31	-	1	-	3	- 7 -
Livorno		0	-	23	-	1	-	1	- 10 -
Lucca		0	-	22	-	3	-	1	- 13 -
Lion		0	-	28	-	2	-	3	- 0 -
Lübeck		1	-	1	-	0	-	2	- 0 -
Lüneburg		1	-	1	-	1	-	1	- 5 -
Lindau		0	-	31	-	1	-	3	- 10 -
Malaga		0	-	31	-	2	-	0	- 0 -
Marseille		0	-	28	-	1	-	1	- 8 -
München		1	-	6	-	1	-	3	- 0 -
Memmingen		1	-	3	-	0	-	1	- 7 -
Magdeburg		1	-	0	-	0	-	1	- 0 -
Neapolis		0	-	29	-	0	-	1	- 8 -
Nürnberg		1	-	2	-	3	-	3	- 0 -
Paris		1	-	1	-	2	-	1	- 10 -
Petersburg		0	-	28	-	0	-	0	- 3 -
Prag		1	-	3	-	0	-	3	- 5 -
Rom		0	-	23	-	1	-	0	- 1 -
Riga		0	-	28	-	2	-	2	- 8 -
Regensburg		1	-	6	-	1	-	3	- 0 -

	nach dem Leipziger Gewicht.
1 Pf. in St. Gallen g. G.	wiegt 1 P. 8 L. 0 Q. 1 pf 0 Gr
dito klein Gew.	0 - 31 - 3 - 2 - 0 -
Strasburg	1 - 0 - 1 - 1 - 0 -
Schafshausen	0 - 31 - 2 - 0 - 0 -
Salzburg	1 - 6 - 1 - 2 - 0 -
Ulm	1 - 0 - 0 - 2 - 0 -
Venedig gr. Gew.	1 - 0 - 2 - 3 - 0 -
dito klein Gew.	0 - 20 - 2 - 2 - 9 -
Verona gr. Gew.	1 - 2 - 0 - 1 - 5 -
dito klein Gew.	0 - 22 - 2 - 3 - 3 -
Wien	1 - 6 - 2 - 0 - 0 -
Warschau klein Gew.	0 - 25 - 3 - 2 - 5 -
Zürch	1 - 4 - 0 - 3 - 8 -
Zittau	1 - 0 - 0 - 1 - 0 -

Diese Tafel giebt demnach ebenfalls die Verhältnisse der an den angeführten Orten gebräuchlichen Pfunde gegen einander in Theilen eines Leipziger Pfundes an. So hat man z. E.

1 Lond. Pf: Par. Pf. = 30 Lt. 3 Qu. 3 pf. 9 Gr:
33 Lt. 2 Qu. 1 pf. 10 Gr.

und wenn man alles auf Gran bringet,

1 Lond Pf: Par. Pf. = 7434:8065

Also sind 7434 Par. Pf. = 8065 Lond. Pf.

Hat man demnach 539 Par. Pf. und frägt, wie viel Londner Pf. es sind: so erhält man

7434 Par. Pf: 539 Par. = 8065 Lond. Pf:

$\frac{8065 \times 539}{7434}$ Lond. Pf.

200 §.

Von obenstehender Tafel ist noch zu merken, daß die in derselben befindliche Vergleichung der Gewichte eigentlich nur vom Kram-Gewicht zu verstehen sey.

sey. Dabey ist auch die Eintheilung des Pfundes in 32 Loth, und eines Loths in 4 Quentchen oder 16 Pfenningen eigentlich nur am meisten gewöhnlich. Es unterscheidet sich aber davon das Gold- und Silber-Gewicht, wie auch das Apotheker-Gewicht.

Fast in ganz Deutschland bedient man sich beym Golde und Silber des Cöllnischen Mark-Gewichts, und hält eine Mark $\frac{1}{2}$ Pfund Cöllnisch Silber- und Gold-Gewicht. Die Mark wird beym Silber in 8 Unzen, oder 16 Loth getheilt. Ein Loth hat 4 Quentchen, und ein Quentchen 4 Pfenning. Demnach ist ein Pfenning-Gewicht $\frac{1}{256}$ Mark. Diesen Pfenning theilt man beym wardiren der Münzen wiederum in 256 Theile, die man Richtpfennings-Theile nennt, wovon also 65536 eine Mark ausmachen. Man theilt auch wohl den Pfenning in 2 Heller, so daß ein Heller 128 Theile des Richtpfennings hält.

Beym Golde wird die Mark in 24 Karat, und ein Karat in 12 Grän getheilt, so daß die Mark 288 Grän, und ein Karat 2730$\frac{2}{3}$ Richtpfennings-theile hält. Ueberdem sind bey den goldenen Münzen die so genannten Eschen oder Eßchen gewöhnlich. Nach des Herrn Schoapps Europäischer Gewichts-Vergleichung so er zu Nürnberg 1722 herausgegeben hat, und woraus Leupold im Theatro Statico P. I. 77. u. f. S. einen Auszug giebt, soll 1 Ducaten 64 Eßgen schwer seyn. Wann nun 67 Stück Reichsgesetzmäßige Ducaten eine Cöllnische Mark schwer seyn sollen, so wird die Cöllnische Mark 4288 Eßgen halten. In den vollständigen Tabellen von dem Verhältniß Herzogl. Mecklenburg. Schwerinischer Courant-Münzen gegen andre

Geld-

Geld-Sorten, Schwerin 1764 ist der Ducaten 65 Eßgen schwer angegeben. Auf diese Art müste eine Cöllnische Mark 4355 Eßgen schwer seyn. Aber in eben den Tabellen XXI S. sind nur 4352 Eßgen für eine Mark Cöllnisch berechnet.

In Engelland, Frankreich, Holland, Braband und mehrern andern Orten ist beym Golde, Silber und Edelgesteinen das so genannte Troy-Gewicht üblich, und mit demselben hat es folgende Bewandniß. Ein Pfund Troy-Gewicht hat eigentlich 12 Unzen, ob man gleich in Holland wohl 16 Unzen rechnet. Hievon gehen 8 Unzen auf 1 Mark Troy, so daß eigentlich 1 Pfund Troy $1\frac{1}{2}$ Mark Troy-Gewicht hält. Die Unze wird eingetheilt in 20 Engels, und ein Engel in 32 Aisken, oder auch wohl in 24 Grän, so daß 3 Grän so viel als 4 Aisken sind. Demnach hält 1 Mark Troy 5120 Aisken, oder 3840 Grän. Es wägen aber 4864 Troysche Aisken 1 Mark Cöllnisch, so daß die Mark Troysch um 256 Aisken oder 8 Engels schwerer ist, als die Cöllnische Mark. Demnach sind 19 Mark Troy so viel als 20 Mark Cöllnisch. Bey Edelgesteinen wird die Troysche Unze in 150 Karat getheilt, die man also von dem oberwehnten Karat-Gewicht beym Golde unterscheiden muß, so daß 1 Pf. von 16 Unzen 2400 Karat hält.

Dafern dies Cöllnische Gewicht eben dasjenige ist, was Hr. v. Clausberg geprüft hat, so ist ein Pfund oder 2 Mark Cöllnisch mit einem Leipziger Pfund einerley. Nach dem Schoapp ist 1 Mark Cöllnisch so viel, als 15 Loth 11 Pfenn. Nürnberger Silber-Gewicht (Leupold a. a. O. 89 S.) und $34\frac{1}{4}$ Loth Nürnb. Silber-Gewicht so viel, als ein Pfund Nürnberger

berger Kramgewicht (Leupold a.a.O. 88 S.) Also wäre 1 Pf. Cölln: 1 Pf. Nürnb. Kramgew. = 31 Lt. 1 Qu. 2 Pfenn.: 34 Lt. 1 Qu. = 502 : 548. Daher findet man nach dem 198 §, es sey 1 Pf. Nürnb. Kramgewicht so viel als 1 Pf. 2 Lt. 3 Qu. 2 Pfenn. $13\frac{1}{2}\frac{8}{5}\frac{7}{1}$ Gr. Cöllnisch Gewicht, welches mit der Tafel ziemlich genau überein trift, woselbst 1 Pf. 2 Lt. 3 Qu. 3 Pfenn. angegeben sind.

Ausser dem Troy-Gewicht ist in Engelland das so genannte Avoir du pois-Gewicht üblich, welches leichter, als das Troy-Gewicht ist. Eine Unze Avoir du pois hält nemlich $437\frac{1}{2}$ solcher Gran, deren die Troysche Unze 480 enthält (Mussenbroek Introd. ad Phil. Nat. Cap. 26. §. 1416. p. 536.)

Beym Pariser Gewicht ist diese Eintheilung gewöhnlich: 1 Pf. hält 2 Mark, 1 Mark hat 8 Unzen; 1 Unze theilt man in 8 Gros oder Drachmes, 1 Dr. oder Gros in 3 Deniers oder Scrupules, und ein Scr. oder Denier in 24 grains, so daß 1 Unze 576 grains hält. Eine Pariser Unze wiegt $472\frac{1}{2}$ Troysche Gran. Weil nun die Troysche Unze 480 Gr. wiegt, so ist 1 Tr. Unz: 1 Paris. Unz = 480 : $472\frac{1}{2}$, und es sind $472\frac{1}{2}$ Tr. Unz = 480 Par. Unz, oder

$$1 \text{ Tr. Unz} = \frac{480}{472\frac{1}{2}} \text{ Par. Unz} = \frac{480}{472\frac{1}{2}} 576 \text{ Pariser grains} = 585\frac{1}{7} \text{ grains.}$$

Diese Vergleichung des Pariser Gewichts mit dem Troysch. ist aus des Eisenschmidts Diss. de ponderibus & mensuris genommen. Das Avoir du pois verhält sich nach dieser Vergleichung zum Pariser Gewicht, wie $437\frac{1}{2}$: $472\frac{1}{2}$, oder 875 : 945, aber hiemit komt das in der Clausbergischen Tabelle angegebene Verhältniß zwischen dem Londner und Pariser Gewicht nicht völlig überein.

Auf

Auf ein Apotheker-Pfund werden ordentlich 12 Unzen gerechnet. Die Unze hat 8 Drachmen, 1 Drachma, 3 Scrupel, und 1 Scrupel, 20 Gran. Nach dem Schoapp (Leupold a.a.O. 115 § mit Verbesserung der Druckfehler) thun 17 Unzen Apotheker Gewicht 34 Loth Nürnb. Silber-Gewicht: aber 7 Unzen 7 Drachmen 8 Gran thun $\frac{1}{2}$ Pf. Leipziger Kramgewicht. Es wäre demnach 1 Loth Leipziger Kramgewicht so viel als $236\frac{3}{4}$ Gran Apotheker-Gewicht. Im Theatro Stat. P. II. §. 6. rechnet Leupold 236 Gran.

201 §.

Beym Kauf und Verkauf verhält sich die Menge von einerley Waare, die man nach Maaß und Gewicht bestimt, wie der dafür zu zahlende Preis. Weiß man demnach, wie viel eine gewisse Menge dieser Waare kostet: so läst sich für jede andre Menge der Preis, und für jeden andern gegebenen Preis die zugehörige Menge der Waare berechnen.

Wenn ein Centner einer gewissen Waare 136 Rthl. kostet, und man frägt, wie viel kostet ein Liespfund: so ist die Proportion diese:

1 Cent: 1 Lpf. = 136 Rthl: vierten Zahl, oder nach gemeiner Art angesetzt:

1 Cent. — 136 Rthl. wie viel 1 Lpf. ?

Wenn 1 Cent. = 110 Pf. und ein Lpf. = 14 Pf.:

so ist die gesuchte Zahl $= \frac{136 \times 14}{110}$ Rthl.

Umgekehrt, wenn ein Centner Waare 136 Rthl. kostet, und man frägt, wie viel man von eben der Waare für 100 Rthl. erhalten wird: so hat man:

$136 : 100 = 110 : \frac{11000}{136}$ Pf.

202 §.

Bey Zinsbarer Verleihung der Capitalien sind die von ungleichen Capitalien in gleicher Zeit zu zahlenden Zinsen den Capitalien, bey einerley Capital aber, und ungleicher Zeit, dieser Zeit proportional.

Wenn also jährlich 5 von 100 bezahlt wird, und man frägt, wie viel Zinsen von 1418 Rthl. jährlich zu zahlen: so hat man 100 Rthl: 1418 Rthl. = 5 Rthl: $\frac{1418 \times 5}{100}$ Rthl. Und wenn von 1000 Rthl. die jährlich 50 R. Zins tragen, nach 7 Jahr 5 Monath die restirenden Zinsen zu bezahlen sind: so ergiebt sich der Belauf durch die Proportion.

1 Jahr: $7\frac{5}{12}$ Jahr = 50 Rthl: $50 \times 7\frac{5}{12}$ Thl. = $370\frac{5}{6}$ Thl.

Dies ist der Grund der ganzen so genannten Zinsrechnung, davon man bey den practischen Schriftstellern eine Menge von Exempeln zur Erläuterung und Uebung nachschlagen kan.

Will man nicht die Zinsen allein, sondern die Summe von Capital und Zins haben; so läst sich das erste Exempel so setzen:

100 Rthl: 105 = 1418: $\frac{1418 \times 105}{100}$ rthl.

Beym zweyten Exempel muß man zuförderst berechnen, daß $137\frac{1}{12}$ Thl. aus 100 Thl. in $7\frac{5}{12}$ Jahr werden. Hierauf kan man ansetzen

100 Thl: $137\frac{1}{12}$ Thl. = 1000 Thl.: $137\frac{1}{12} \times 10$ = $1370\frac{5}{6}$ Thl.

203 §.

Der Lohn, den ein Arbeiter verdient, verhält sich entweder wie die Zeit, die der Arbeiter dabey zubringt,

bringt, oder zuweilen wie die Größe der verrichteten Arbeit selbst.

Es hat gleiche Bewandniß mit dem Zins eines vermietheten Hauses, Gutes, oder einer andern Sache.

Je mehr ein Arbeiter zu thun hat, desto längere Zeit wird er darauf zubringen, und die verrichtete Arbeit wird sich wie die Zeit verhalten, vorausgesetzt, daß er immer gleich fleißig arbeite.

Nimt man mehr Arbeiter, so wird in eben der Zeit mehr zu Stande kommen, und wenn alle Arbeiter gleich fleißig sind: so wird die verrichtete Arbeit der Anzahl der Arbeiter Proportional seyn.

Wenn also z. E. 16 Knechte in einem Tage 50 Fuder Erde etwa bey Abtragung eines Berges fortschaffen können, und man frägt, wie viel Leute erfodert werden, wenn in einem Tage 738 Fuder weggeschaft werden sollen: so ist die Antwort:

$$50 \text{ Fuder} : 738 \text{ Fuder} = 16 \text{ Knechte} : \frac{738 \times 16}{50}$$

$= 236$ bis 237 Knechte.

Es hat nicht die geringste Schwierigkeit sich selbst so viele Exempel, als man will, zur Uebung aufzusetzen, wobey die eine, oder die andre dieser Regeln angebracht werden kann. Viele solche Exempel würden hier den Vortrag unnöthig weitläuftig machen, und man kan eine ziemliche Menge derselben in einem jeden practischen Schriftsteller finden.

204 §.

Da man durch die Zins-Rechnung finden kan, wie viel größer ein Capital nach einer gewissen Zeit, durch den hinzukommenden Zins geworden ist (202 §); so läst sich auch umgekehrt berechnen, wie viel kleiner

ein durch Zinsen schon vermehrtes Capital vor einer gewissen Zeit gewesen sey. Giebt man 5 p.c. jährlichen Zins, so kan man sagen: aus 100 Rthl. werden in einem Jahr 105 Rthl., in 2 Jahren 110 rthl., in 3 Jahren 115 rthl. u. s. f. Also auch umgekehrt: 105 Thl. waren vor einem Jahr 100 rthl, 110 Thl. waren vor 2 Jahren 100 rthl. und 115 thl. waren vor 3 Jahren 100 u. s. f. Dies ist der Grund der sogenannten Rabatt oder Interusurien-Rechnung.

Man setze einer ist dem andern 1500 thl. nach 3 Jahren zu zahlen schuldig, und bezahlt sie gleich, wie viel muß er wegen des Vortheils abrechnen, den der Creditor wegen der frühern Bezahlung hat. Dies läst sich so berechnen.

115 thl. waren 100 thl. wie viel 1500 thl. vor 3 Jahren?

Die Antwort ist: $\frac{150000}{115} = 1304\frac{40}{115}$ Thaler.

Dies abgezogen von 1500 giebt das Interusurium $195\frac{75}{115}$ thl.

Es ist dies eigentlich die gemeine Art das Interusurium zu suchen. Zu Berechnung des zusammengesetzten Interusurii wird in der Folge besondere Anleitung gegeben werden.

205 §.

Wenn ein Ganzes in verschiedene Theile getheilt werden soll, die sich eben so, wie die Theile eines andern Ganzen verhalten, welches in eben so viele Theile getheilt ist: so muß jedem Theil des einen Ganzen ein Theil des andern zugehören, der sich gegen sein Ganzes eben so verhält. Es sey $A = a + na$ +

$+ma$ und $B = a + na + ma$: so ist auch $a(1+n+m) : a = a(1+n+m) : a$, (172 §) d. i. $a + na + ma : a = a + na + ma : a$, oder $A : a = B : a$. Demnach lassen sich die Theile des einen nach der Regel Detri finden, wenn die Theile des andern gegeben sind. Dies ist der Grund der Gesellschafts-Rechnung, die daher den Nahmen führet, weil sie häufig gebraucht, wird, wenn eine Summe Geldes, oder etwas dergleichen, dessen Werth sich schätzen läst, unter mehr Personen ungleich vertheilt werden soll. Bey Compagnie-Handlungen, Concursen, Erbtheilungen, Havereyen u. s. f. findet diese Rechnung, so wie in sehr vielen ähnlichen Fällen, ihre Anwendung, daher sie auch zuweilen die Vermischungs-Rechnung heist, wenn von einer Sache, die aus verschiedenen Ingredientien besteht, z. E. Schießpulver, Arzneyen u. dgl. eine gewisse Menge verfertiget werden soll, und gefragt wird, wie viel von jeder Art der Bestandtheile erfodert werde.

Gesetzt vier Personen A, B, C, D, legen zu einer Handlung folgende Summen, 9600 thl, 6000 thl, 4800 thl, 3600 thl. Diese gewinnen zusammen 5000 rthl, und die Frage ist, wie viel gehöret einem jeden nach Proportion seiner Einlage? Man muß die Zahl 5000 in 4 Theile eintheilen, die sich wie die Zahlen, 9600, 6000, 4800, 3600, oder 96, 60, 48, 36; oder auch 8, 5, 4, 3 verhalten (173 §). Die Summe der letzten vier Zahlen ist 20. Also mache man folgende vier Proportionen:

$$20 : 8 = 5000 : \frac{8 \times 5000}{20} = 2000 \text{ thl. dem A.}$$

$$20 : 5 = 5000 : \frac{5 \times 5000}{20} = 1200 \text{ thl. dem B.}$$

$$20:4=5000:\frac{4\times5000}{20}=1000\text{ thl. dem C.}$$

$$20:3=5000:\frac{3\times5000}{20}=750\text{ thl. dem D.}$$

Summe 5000 rthl.

206 §.

Bey den bisherigen Fällen, wo sich die Regel Detri anwenden läst, sind die gleichnamigten Glieder der Proportion, wenn sie gehörig geordnet ist, allemahl in einer ähnlichen Verbindung, als z. E. Waare und Preis, Capital und Zins, Arbeit und Zeit, Anzahl der Arbeiter und Größe der Arbeit, u. s. f. Man kan hier allemahl sagen, je größer oder kleiner das eine dieser Dinge ist, desto größer oder kleiner muß das andre seyn. Z. E. je mehr Waare, desto mehr Geld; je größer Capital, desto mehr Zins u. s. f. Allein es sind nicht allemahl zwo Größen zwoen anbern Größen, auf welchen sie sonst eine ähnliche Beziehung haben, in einerley Ordnung, sondern zuweilen in umgekehrter Ordnung proportional.

Einerley Arbeit kan in kürzerer Zeit zu Stande kommen, wenn mehr Personen Hand anlegen: doppelt so viel Arbeiter bringen sie in halb so vieler Zeit zu Stande. Ueberhaupt ist die Menge der Arbeiter der Zeit umgekehrt proportional, worin sie einerley Arbeit zu Stande bringen.

Wenn also 120 Soldaten mit einem gewissen Festungsbau innerhalb 9 Monathen fertig werden, und der Bau soll in 3 Monathen zu Stande seyn, so erhellet, daß man dreymahl mehr Leute haben müsse, weil man im dritten Theil der Zeit fertig seyn will.

Man

Man siehet leicht, daß dieser, und ähnliche Fälle von dieser Art ebenfalls zur Regel Detri gehören, weil man drey Zahlen weis, und es soll die vierte gesucht werden. Wer es deutlich einsiehet, was es mit der Regel Detri für eine Beschaffenheit habe, der braucht hier keine neue Regeln, weil er von selbst die drey gegebenen Zahlen mit der gesuchten in eine richtige Proportion bringen wird. So würde man setzen müssen.

3 Monath : 9 Monath = 120 Sold : $\frac{9}{3} \times 120$ Sold. Wer ohne Theorie ein Exempel der Regel Detri nach gemeiner Art anzusetzen gelernt hat, wird es hier leichter versehen können. Er wird das vorige Exempel so richtig anzusetzen glauben:

9 Mon. geben 120 Sold. wie viel, 3 Mon? und es erhellet, daß auf solche Art eine dreymahl kleinere Anzahl würde gefunden werden, da sie doch dreymahl grösser seyn muß. Bey der gemeinen Art des Ansatzes bedarf man hier der neuen Regel: Daß die Fragzahl nicht die dritte, sondern die erste im Ansatz seyn, und dagegen die erste Zahl in die dritte Stelle gesetzt werden müsse.

Der Ansatz des vorigen Exempels würde also dieser seyn:

Wie viel 3 Mon? wenn 120 Soldaten 9 Monath geben: und man kan sich die Sache so vorstellen, daß die Glieder zwar eben so, wie sonst nach der Reihe, aber von der Rechten gegen die Linke zu in umgekehrter Ordnung, müssen geschrieben werden. Dann bleibt die Rechnungs-Regel selbst ungeändert. Man muß das Product der beyden letzten Zahlen durch die erste dividiren. Dies hat man die verkehrte Regel Detri genannt, und sie von der ordentlichen Regel

Detri unterschieden. An sich wäre es nicht nöthig gewesen, diesen Unterschied zu machen, denn es ist einerley Regel auf die gegebenen Zahlen so angewandt, wie es der Beschaffenheit der Dinge gemäß ist, welche der kennen muß, der die Rechenkunst anwenden will. Inzwischen ist es für solche Anfänger dienlich, welche nur wenig Theorie lernen können, oder wollen. Wenn diese beurtheilen wollen, ob ein Exempel zur ordentlichen, oder verkehrten Regel Detri gehöre, so müssen sie auf die Fragzahl acht geben.

Kan man sagen: Je gröſſer die Fragzahl ist, desto gröſſer: und je kleiner die Fragzahl ist, desto kleiner muß die gesuchte Zahl seyn; so gehöret es zur ordentlichen Regel Detri. Muß man aber so sagen: Je gröſſer die Fragzahl ist, desto kleiner, und je kleiner die Fragzahl ist, desto gröſſer muß die gesuchte Zahl seyn; so gehört das Exempel zur verkehrten Regel Detri.

Im obigen Exempel erhellet, daß man so sagen müsse: Je mehr Monathe, desto weniger Leute sind nöthig, und je weniger Monathe, desto mehr Leute sind nöthig, wenn dasselbe Werk zu Stande kommen soll.

207 §.

Die Reductionen einer Münze, eines Maaßes eines Gewichts auf eine andre Münze, Maaß, Gewicht u. s. f. können ebenfalls hieher zur verkehrten Regel Detri gezogen werden, nach dem man sich die Sache vorstellen will. Jede Zahl ist als ein Quotient anzusehen, dessen Divisor die angenommene Einheit, und die Größe selbst, welche man durch die Zahl ausdrückt, das zugehörige Dividendum ist: denn die Zahl drückt aus, wie oft die Einheit oder

das

das Maaß in der gemessenen Größe enthalten sey. Soll nun eben diese Größe durch eine andre Einheit ausgedrückt werden: so siehet man leicht, daß bey gleichen Dividendis die Quotienten sich umgekehrt, wie die Divisores verhalten (173 §). Wenn eine Elle doppelt so lang, als ein Fuß ist: so wird eben die Länge nur halb so viele Ellen, als Füße enthalten. Man nehme das erste Exempel aus dem 195 §, wo die Frage war, wie viel Thaler so viel machen, als 194 Kayser-Gulden. Die Proportion, welche die Antwort giebt, wird diese seyn.

Thal: Kayserfl: = 194: ges. Thalern, wenn man das Verhältniß des Thalers zum Kayser-Gulden weis; und dies weis man, wenn man beyde durch eine und eben dieselbe neue Einheit z. E. durch Mkl. ausdrücken kan. Es wird auf solche Art

3 Mkl: 2 Mkl: = 194 Kayserfl: ges. Thal; und man erhält $\frac{2 \times 194}{3} = 129\frac{1}{3}$ Thl: wie im 195 §.

Wenn man sich von diesem Exempel eine Vorstellung nach gemeiner Art machen will; so muß man 1 Thl. als die Fragzahl ansehen, und sich die Sache so vorstellen: Wenn 1 Kfl. giebt 194, wie viel giebt ein Thaler? Nun weis man; je größer der Werth einer Münze ist, desto weniger derselben gehören zu einer verlangten Summe Geldes. Also muß hier die Fragzahl voranstehen, und der gemeine Ansatz ist dieser:

Wie viel 1 Thl? — 194 — 1 Kfl:

oder 3 Mkl: — 194 — 2 Mkl: Facit $129\frac{1}{3}$.

208 §.

Ein doppeltes Capital trägt in halb so vieler Zeit eben so viel Zins, als das einfache in der doppelten, und überhaupt sind die Zeiten den Capitalien umgekehrt proportional, wenn die Zinsen gleich seyn sollen. Man setze also, Cajus hat Titio 1000 rthl. auf 8 Monathe ohne Zins geliehen gehabt, und nun leihet Titius dem Cajo 700 rthl. mit dem Beding, sie so lange zu behalten, bis der Dienst auf beyden Seiten gleich werde. Die Frage ist: Wie lange Cajus die ihm geliehenen 700 rthl. behalten müsse? Er muß sie so lange behalten, bis sich die Zinsen davon eben so hoch belaufen, als die Zinsen vom 1000 thl. in 8 Monath. Man schließt:

700 rthl: 1000 rthl: = 8 Mon: ges. Zeit. Diese gesuchte Zeit wird = $\frac{80}{7}$ Monath = $11\frac{3}{7}$ Mon: = 11 Mon: 13 Tage.

Wenn jemand zwey oder mehr Capitalien nach verschiedenen Zeiten zu zahlen schuldig ist: so läst sich auf ähnliche Art berechnen, wie lange er alle zusammen behalten könne, wenn er sie auf einem Brete bezahlen will. Er kan nemlich die ganze Summe auf eine so lange Zeit behalten, in welcher sie eben so viele Zins trägt, als die Summe aller Zinsen, die jedes einzelne Capital in seiner Zeit tragen würde. Dies ist der Grund der sogenannten Zeit-Rechnung bey ausstehenden Schulden.

209 §.

Je breiter ein Stück Zeug ist, daß zu einerley Absicht, z. E. Kleidung, Tapezierung eines Zimmers u. s. f. gebraucht werden soll, desto weniger hat man davon in Absicht der Länge nöthig. Wenn es dop-

doppelt so breit ist, wie ein andres, so braucht es nur halb so lang zu seyn, als jenes, und überhaupt muß die Länge der Breite umgekehrt proportional seyn. Man setze es werden zu einer Kleidung 10 Ellen Zeug a $\frac{5}{4}$ breit, erfodert, und man nimt dazu Unterfutter, von 2 Ellen Breite, so frägt sich, wie viel Unterfutter man nöthig habe? Folgende Proportion giebt die Antwort:

2 Ellen : $\frac{5}{4}$ = 10 Ellen : $\frac{5}{8}$ Ell = $6\frac{1}{4}$ Ell.

Bey diesem letztern und ähnlichen Fällen, dergleichen z. E. im 203 und 204 § vorkommen, sind die Proportionen eben nicht in völliger Schärfe zu nehmen. Wenn es gleich seine Richtigkeit hat, daß ein Paar viereckte Stücken Zeug gleich groß sind, wenn ihre Längen den Breiten umgekehrt proportional sind: so lassen sich doch die zerschnittenen Stücke nicht allemahl eben so genau wieder zusammenfügen, bey den mannigfaltigen Einrichtungen der daraus zu verfertigenden Kleider, oder andrer Sachen, daß nicht etwas mehr oder weniger zuweilen darauf gehen sollte, als die Rechnung giebt. So setzt auch die Rechnung im 203, und 204§ voraus, daß von mehrerern Arbeitern, jeder in eben der Zeit so viel, als der andre zu Stande bringe, auch jeder für sich in gleichen Theilen der Zeit gleich viel ausrichte. Dies kan aber nie so genau genommen werden.

210 §.

Wer die bisherigen Lehren sich wohl bekant gemacht hat, der wird sich leicht in solchen Fällen finden können, wenn mehr als drey Zahlen gegeben sind, und man die Zahl, welche eigentlich verlangt wird, durch eine wiederholte Anwendung der Regel Detri

suchen muß. Von der Art wäre das zweyte Exempel des 202 §, wenn man es so ausdrückte: 100 Thl. geben in 1 Jahr 5 Thl. Zins, wie viel also 1000 Thl. in 7 Jahr 5 Monath? Man berechnet hier zuerst die einjährigen Zinsen von 1000 thl. aus der Proportion

100 thl : 1000 thl. = 5 thl : 50 thl. einj. Zins von 1000 thl.

Und weil man nun weis, daß 1000 thl. in 1 Jahr 50 thl. Zins geben, so setzt man ferner an

$1 J. : 7\frac{5}{12} J. = 50 \text{ thl.} : 370\frac{5}{6} \text{ thl.}$ als die eigentlich gesuchte Zahl.

Man hat in Fällen von dieser Art nicht nöthig den doppelten Ansatz zu machen, und die vierte Zahl in der ersten Proportion würklich zu berechnen: es läst sich alles in einen einzigen Ansatz bringen, und die Rechnung wird merklich verkürzt, wenn man folgende Betrachtung zu Hülfe nimt.

Aus den beyden Proportionen

100 thl : 1000 thl. = 5 thl : 50 thl.

$1 J. : 7\frac{5}{12} J. = 50 \text{ thl} : 370\frac{5}{6} \text{ thl.}$

folgt nach dem 174 § diese:

$100 \times 1 : 1000 \times 7\frac{5}{12} = 5 \times 50 : 50 \times 370\frac{5}{6}$,

und die beyden letzten Glieder kan man durch 50 dividiren, ohne ihr Verhältnis zu ändern 173 §, so daß man diese Proportion erhält

$100 \times 1 : 1000 \times 7\frac{5}{12} = 5 : 370\frac{5}{6}$.

Hier

Hier ist die vierte Zahl diejenige, welche man eigentlich suchte, und die Zahl 50, welches in der ersten Proportion die vierte war, fällt ganz weg. Die letzte Proportion ergiebt, daß sich die Zinsen von verschiedenen Capitalien in verschiedenen Zeiten, wie die Producte der Capitalien in die Zeiten verhalten, auf welche sie verliehen sind. Wer dies ein für allemahl merket, kan den Ansatz so machen

100 thl. × 1 J. : 1000 thl. × $7\frac{5}{12}$ J. = 5 thl :

$$\frac{1000 \times 7\frac{5}{12} \times 5}{100 \times 1} = 370\frac{5}{6} \text{ thl.}$$

Es kommen viele andre Fälle in der Ausübung vor, wo sich ein ähnliches Verfahren anbringen läst, und die practischen Schriftsteller geben für dergleichen Fälle eine besondre Regel, die sie die *regulam quinque* nennen, weil zu fünf Zahlen die sechste gesucht wird. Man hat hier in der eigentlichen Frage zwey Zahlen, als Frag-Zahlen, worauf zwey andre Zahlen eine ähnliche Beziehung haben. Wenn man jedes Paar dieser Zahlen als Factoren eines Products untereinander schreibt; so kan man übrigens den ganzen Ansatz, auf eine ähnliche Art wie im 196 §, so einrichten

100 thl. geben 5 thl. Zins. Wie viel 1000 thl.

in 1 J.	in $7\frac{5}{12}$ J.
P. 100	Prod. $\frac{89000}{12}$

Also die gesuchte Zahl = $\frac{5 \times 89000}{12 \times 100}$ =

$$\frac{5 \times 890}{12} = 370\frac{5}{6} \text{ thl.}$$

Hier-

Hierauf gründet sich folgende gemeine Regel, wie ein Exempel nach der Regel quinque anzusetzen sey.

Man setze beyde Fragzahlen am Ende untereinander, das, was mit dem gesuchten von einerley Art ist, in der Mitte, und die beyden übrigen Zahlen vorne an untereinander. Die beyden Fragzahlen, imgleichen die beyden Zahlen in der ersten Stelle multiplicire man ineinander, so geben sich drey Zahlen, womit man nun nach der ordentlichen Regel Detri umgehet.

Es läst sich in vielen ähnlichen weit mehr zusammengesetzten Fällen, wo man die Regel Detri drey- vier- und mehrmahl nach einander anwenden müste, eine völlig ähnliche Verkürzung anbringen, und die gesamten hieher gehörigen Rechnungs-Vortheile machen die sogenannte zusammengesetzte Regel Detri aus. Es soll davon im zweyten Theil bey der weitern Ausführung der Rechenkunst ausführlicher gehandelt werden.

Der

Der
Geometrie erster Theil.
Die ebene Geometrie.

Der I. Abschnitt.
Von den graden Linien und Winkeln.

1 §.

Die Eigenschaft der Größe komt den körperlichen Dingen im eigentlichen Verstande zu, insofern diese einen gewissen Raum einnehmen. Ob nemlich ein Cörper größer, oder kleiner, als der andre sey, beurtheilen wir daher, daß der eine bald mehr, bald weniger Raum, als der andre einnimt, oder wie man auch zu reden gewohnt ist, der eine bald mehr, bald weniger ausgedehnt ist, als der andre. Von diesem Raum aber, den ein Cörper ausfüllt, haben wir schwerlich einen andern, als blos sinnlichen Begriff: wenigstens genüget es hier, wenn man sich allein an dem sinnlichen Begriff hält. Wäre ein gewisser Cörper, z. E. ein Würfel in zerschmolzenem Wachs, oder etwas dergleichen, ganz eingetaucht: so würde das Wachs beym Erkälten sich rund um an den Cörper anhängen. Man setze der Cörper könnte, nach dem das Wachs erkältet, aus demselben herausgebracht werden, ohne daß die Rinde, so ihn allenthalben umgiebt, zerbrochen würde:

so

so würde innerhalb des Wachses eine Hölung bleiben, mit dem herausgeschaften Würfel von einerley Gestalt, und Größe. Und diese Hölung ist der Raum den der Würfel einnahm, da er noch im Wachs verschlossen war. Eben so einen Raum nimt der Würfel allenthalben ein, wo man ihn auch hinbringt, und die Größe und Gestalt dieses Raums ist mit der Größe und Gestalt des Würfels allemahl einerley. Man kan sich leicht auf ähnliche Art eine Vorstellung von dem Raum machen, den jeder andre Cörper ausfüllt.

2 §.

Die Größe, welche eigentlich den körperlichen Dingen allein eigen ist, nennt man eine ausgedehnte Größe, weil der Cörper desto größer, oder kleiner ist, je mehr oder weniger er ausgedehnt ist. Die Größe seiner Ausdehnung ist mit der Größe des Raums, den der Cörper ausfüllt, allemahl einerley (1 §). Deswegen heist auch wohl der Raum selbst eine ausgedehnte Größe.

3 §.

Die Geometrie ist eine Wissenschaft von der Art und Weise, wie man eine ausgedehnte Größe mit der andern vergleichen, und aus gegebenen Größen von dieser Art, andre von eben der Art finden kan. Sie ist eine Wissenschaft von einem ungemein grossen Umfange, und der Nahme drückt den Vorwurf derselben nicht in seiner völligen Allgemeinheit aus. Das griechische Wort γῆ bedeutet nicht allein die ganze Erde; sondern auch oft eine Landschaft, ein Stück Feld, und der Name μέτρον bedeutet ein

Maaß.

Maaß. Also würde man den griechischen Namen Geometrie füglich durch das deutsche Wort: Feldmeßkunst übersetzen können. In der That stehen auch viele noch in den Gedanken, daß Geometrie und Feldmeßkunst einerley Wissenschaft sey: und vor Zeiten, bevor die Wissenschaft zu ihrer Vollkommenheit gebracht worden, war es auch würklich so: die Regeln, nach welchen sich ein Feld aufmessen läst, machten wahrscheinlicher Weise die erste Geometrie aus. Die Nothwendigkeit hat die Menschen dahin gebracht, auf solche Regeln zu denken, und man schreibt ihre Erfindung gemeiniglich den alten Egyptern zu. Aber die Griechen haben schon lange vor Christi Geburth dieser Wissenschaft eine ganz andre Gestalt gegeben, und ihre Lehren so allgemein gemacht, daß man sie nunmehro allenthalben anwenden kan, wo sich eine ausgedehnte Größe mit einer andern vergleichen läst. So viel man weis, ist der unter den Geometern so berühmte Euclides der erste, welcher die zu seiner Zeit bekannt gewesenen geometrischen Lehren gesamlet, und einen Lehrbegriff der Geometrie verfasset hat, der noch bis auf den heutigen Tag das Muster aller übrigen Lehrbücher dieser Wissenschaft ist. Euclides lebte etwa 300 Jahre vor Christi Geburth, und sein Lehrbuch ist unter dem Titel: Euclidis elementa, bekannt.

4 §.

Wenn man sich von dem leeren Raum, den ein Cörper ausfüllte, da er in demselben befindlich war, etwa eine solche Vorstellung macht, wie im 1 §: so siehet man leicht, daß dieser leere Raum eigentlich kein Cörper heissen könne, ob er gleich einige Eigenschaf-

schaften des Cörpers, der ihn ausfüllte, behält, nemlich Gestalt und Größe. Die übrigen Eigenschaften des Cörpers kommen in der Geometrie gar nicht in Betrachtung, und das ist die Ursache, weswegen dieser leere Raum ein geometrischer Cörper heißt. Es ist hier gleich viel, ob man sich diesen Raum mit irgend einem Cörper angefüllt vorstellt, oder nicht.

5 §.

Jeder Cörper hat gewisse Grenzen, die ihn von allen Seiten umgeben, und diese äusserste Grenze desselben, die ihn von allen Seiten umgiebt, heist seine Oberfläche. Man kan sich auch einzelne Theile einer solchen Oberfläche allein vorstellen, dergleichen z. E. die sechs Seiten-Flächen eines Würfels sind. Dann aber hat eine solche Fläche wiederum ihre Grenzen, und diese Grenzen der Oberflächen heissen geometrische Linien, Auch hier kan man sich einzelne Theile von der Grenze vorstellen, die eine solche Fläche von allen Seiten umgiebt, die ebenfalls Linien sind. So ist jede Seiten-Fläche eines Würfels von vier solchen Linien eingeschlossen.

6 §.

Auch eine jede Linie hat ihre Grenzen, wo sie anfängt und aufhört. Die Grenzen einer Linie heissen geometrische Puncte. Man kan sich jede Linie, wo man will, getheilt vorstellen, und die Grenze, wo beyde Stücke zusammenhängen, wird ein Punct seyn. Also kan man sich in einer Linie unzählig viele Puncte vorstellen, nur muß man sich hier die Vorstellung nicht machen, als ob eine solche Linie etwa aus einer Menge aneinander gelegten Puncte bestehe. Wenn

eine

eine Linie sich von A nach B erstreckt, und man theilt 1 Fig.
sie bey C in zwey Stücke AC, und CB, so muß man sich diese Vorstellung davon machen: Das Stück AC fängt in A an, und hält in C auf, aber C ist nicht allein der End-Punct von AC; sondern zugleich der Anfangs-Punct von CB. Die beyden Stücke AC und CB hängen in dem Punct C zusammen.

7. §.

Wenn die Theile einer Größe so mit einander zusammenhängen, daß da, wo der eine aufhört, zugleich der andre anfängt, und zwischen beyden nichts vorhanden ist, daß zu dieser Größe nicht gehört: so heist sie eine **sterige Größe** (quantitas continua). So sind alle ausgedehnte Größen beschaffen, die man in der Geometrie betrachtet, wie das vorige Exempel von der Linie zeiget. Die in der Welt würklich vorhandenen Cörper sind nicht von der Beschaffenheit, welches bey einigen deutlich in die Augen fällt. In dem Innern eines Schwammes z. E. befinden sich unzählig viele Löcher, die mit der Materie des Schwammes nicht ausgefüllt sind, und zwischen ein Paar nach einander folgenden Theilchen befindet sich häufig Luft, Wasser, und dergleichen fremde Materie, die zu dem Schwamm selbst nicht gehöret.

8 §.

Man theilt die Linien in verschiedene Classen, und unterscheidet vornemlich **grade** und **krumme Linien** von einander. Der Begriff von demjenigen, was grade sey, gehört zu den einfachen Begriffen, und läst sich schwerlich durch irgend eine Erklärung deutlich machen. Aber dies weis auch ein jeder von

selbst, und man lernt von Jugend auf so gut unterscheiden, was grade, oder nicht grade sey, wie man die Farben unterscheiden lernt, ohne daß man im Stande ist zu sagen, wie z. E. roth oder grün aussiehet. So viel kan man inzwischen von einer graden Linie sagen, daß sie sich von ihrem Anfangs- bis zum End-Punct in einerley Richtung erstrecke; und man bemühet sich vergeblich, mehr Merkmahle derselben, durch Worte anzugeben, es sey denn, daß man mit vielen Worten immer einerley sagen will. Eine krumme Linie ist eine solche, worin kein Theil grade ist. Eine grade Linie also, die sich von einem Punct der krummen Linie bis zu einem andern in eben der Linie erstreckt, ist von dem zwischen eben diesen Puncten liegenden Stück der krummen Linie, allemahl unterschieden, die beyden Puncte mögen so nahe an einander liegen, als man will.

9 §.

Man nimt in der Geometrie die Voraussetzung an, daß es allemahl möglich sey, von einem gegebenen Punct *A* bis zum andern *C* eine grade Linie zu ziehen, und diese grade Linie *AC* vorwärts nach *B*, oder auch rückwärts nach *D*, so weit, als man will, zu verlängern. Eigentlich lassen sich keine blos geometrische Linien sinlich darstellen; so wenig, als man geometrische Puncte sinlich vorstellen kan. Allein ein Tüpfelchen, das man mit Dinte, oder etwas dergleichen, vermittelst einer spitzigen Feder auf dem Papier macht, ist eine sinliche Abbildung des Puncts, und ein Strich, den man mit einer zarten Feder ziehet, ist eine sinliche Abbildung einer Linie. Man siehet das Tüpfelchen als

Fig. 1

als etwas an, das gar keine Ausdehnung hat, und bey dem Strich betrachtet man blos die Ausdehnung nach der Länge. Deswegen kan man solche Bilder der Puncte und Linien so ansehen, als wenn es würklich geometrische Puncte und Linien wären. Bewegte sich ein wahrer geometrischer Punct von A nach C: so würde der Weg, durch welchen er gegangen wäre, eine Linie seyn; und wenn der Punct, während seiner Bewegung seine Richtung nie änderte; so wäre sein Weg eine grade Linie. Deswegen kan man sich die Vorstellung machen, daß eine Linie entstehe, indem ein Punct von einem Ort zum andern fortgeht, und wenn dieser Punct indem er fortgeht, seine Richtung nicht ändert: so wird sein Weg eine grade Linie seyn.

10 §.

Wenn die Oberfläche eines geometrischen Cörpers so beschaffen ist, daß jede grade Linie, die man zwischen zweenen auf dieser Oberfläche angenommen Puncten ziehen kan, ganz in diese Oberfläche fält: so heist sie eine ebene Fläche, auch schlechthin, eine Ebene. Eine krumme Fläche aber ist eine solche, worauf sich kein Theil, der eben wäre, angeben läst. Ein zarter nicht sehr langer Faden, wird grade, wenn man ihn ausspannt. Wenn man auf einem ebenen Tische, zwischen zweenen angenommenen Puncten einen solchen Faden spannt: so wird er sich allenthalben an dem Tische anschliessen, wo auch die Puncte auf dem Tische angenommen werden. Hierauf gründet sich die Art, wie man vermittelst des Lineals auf einer ebenen Fläche von einem Punct zum andern eine grade Linie zieht. Weil das Lineal selbst eben, und an seiner Schärfe grade ist: so wird die Schärfe

an der Ebene allenthalben anschliessen, wenn man sie an zweenen Puncten auf dieser Ebene anlegt, und nun kan man eine spitzige Feder, oder etwas dergleichen an der Schärfe des Lineals von einem Puncte zum andern fortführen.

11 §.

Ueberhaupt wird in der Geometrie anfangs zum Grunde gesetzt, daß alle Linien und Puncte, die in Betrachtung kommen werden, auf einer und eben derselben Ebene liegen. Und diejenigen Lehren von den ausgedehnten Größen, welche sich in dieser Voraussetzung erweisen lassen, machen den ersten Haupttheil der Geometrie aus, welcher den Namen der ebenen Geometrie (Geometria plana) führet.

12 §.

Wenn man durch zwey Puncte *A* und *C* eine grade Linie *DB* gelegt hat: so ist dadurch die Lage dieser Linie völlig bestimt, und man kan durch eben die Puncte A und C keine andre Linien legen, die von der vorigen der Lage nach unterschieden wäre, ob sie gleich länger, oder kürzer seyn könnte. Wenn man durch eben die Puncte A und C noch andre Linien ziehet: so fallen sie insgesamt mit der ersten zusammen.

13 §.

Man kan von einem und eben demselben Punct A,
2 Fig. ein paar unterschiedene Linien AB und AC fortziehen, so daß beyde in dem Punct A zusammenstossen. Diese Lage zwoer graden Linien gegen einander, wenn sie von einem gemeinschaftlichen Puncte A nach verschiedenen

denen Richtungen AB, und AC fortgezogen sind, heist ein gradlinichter ebener Winkel, oder schlechthin ein Winkel, weil in der ebenen Geometrie von keinen andern Winkeln, die Rede seyn wird. Der Punct A, worin beyde Linien zusammenstossen, heist die Spitze, und die beyden graden Linien AB, und AC die Seiten oder Schenkel des Winkels.

14 §.

Verlängert man die beyden Schenkel AB, und AC eines Winkels durch die Spitze A nach der entgegengesetzten Seite, bis E und D: so erhält man zwo grade Linien, BE und CD, die sich bey A durchschneiden, und es erhellet leicht, daß zwo solche Linien sich nicht in mehrern, als in dem einen Punct *A* schneiden können. Wenn beyde Linien ausser A noch einen andern Punct F gemein hätten; so würde die eine mit der andern völlig zusammenfallen müssen (12 §), und es wären nicht zwo der Lage nach unterschiedene Linien. Uebrigens erhellet leicht, daß jede grade Linie, wie CD, die Ebene, worauf sie verzeichnet ist, in zwey Stücke theile, die zu beyden Seiten dieser Linie CD liegen werden. Und wenn ein Punct *B* auf der einen, ein andrer Punct *E* aber auf der andern Seite der Linien *CD* liegt: so wird die grade Linie *BE* die vorige *CD* gewiß irgendwo schneiden. 3 F.

15 §.

Allemahl, wenn eine Linie CD die andre BE schneidet; so entstehen um den Durchschnitts-Punct A herum vier unterschiedene Winkel, die man mit Buchstaben so bezeichnen muß, daß einer mit dem andern

nicht verwechselt werde. Dies erhält man am besten dadurch, wenn man jeden Winkel mit dreyen Buchstaben bezeichnet, davon einer an der Spitze, und zweene an den Schenkeln gesetzt werden. Im Schreiben aber, und in der Aussprache setzt man allemahl denjenigen Buchstaben in der Mitte, welcher an der Spitze stehet. Wenn nun gleich noch weit mehr als vier Winkel in eben der Spitze A zusammenstossen: so wird doch keiner mit den übrigen verwechselt werden. Wenn z. E. der Winkel, welcher in der Zeichnung rechter Hand liegt, verstanden werden soll: so nent man ihn BAC, oder auch CAB, derjenige, welcher ihm linker Hand grade gegen über liegt, heist DAE, oder EAD u. s. f. Wenn eben die Spitze A
2 F. nur zu einem Winkel gehöret, wie in der zweyten Figur: so ist es hinlänglich den Winkel mit dem einzigen Buchstaben A, der an seiner Spitze stehet, anzudeuten, weil nun daher keine Verwirrung zu besorgen ist. Oft ist es auch bequem einen kleinen Buch-
3 F. staben, wie x y u. s. f. in der Oefnung zwischen den Schenkeln zu setzen, und dadurch die Winkel zu unterscheiden.

16 §.

Wenn eine ausgedehnte Größe so auf eine andre gelegt werden kan, daß die Grenzen der einen mit den Grenzen der andern zusammen fallen: so sagt man, sie passen auf einander. Sind es geometrische Cörper (oder wenigstens nicht blos Linien Winkel, und ebene Flächen), und man kan den einen in den andern so hineinschieben, daß beyde völlig zwischen einerley Grenzen enthalten sind, wie wenn man im 15 § den dort als ein Beyspiel erwähnten Würfel

wiederum in die Hölung innerhalb des Wachses brächte: so sagt man besser, daß sie ineinander passen.

Es ist am leichtesten, diesen Gedanken auf grade Linien und Winkeln anzuwenden. Die Grenzen ei- 4 F.
ner graden Linie sind ihre beyden Endpuncte. Kan man demnach die grade Linie CD auf AB so auflegen, daß wenn der Punct C auf A, und CD auf AB liegt, auch D in B fält: so past CD auf AB. Die Spitze eines Winkels, nebst seinen beyden Schenkeln machen seine Grenzen aus. Kan man demnach den Winkel EDF in den Winkel BAC so hineinschieben, 5 F.
daß wenn die Spitze D auf der Spitze A, und der eine Schenkel DF auf AC liegt, auch der andre Schenkel DE auf AB fält; so past der Winkel EDF auf dem Winkel BAC.

In Ansehung der Winkel ist folgendes aber noch anzumerken. Es kan der Winkel EDF auf dem Winkel BAC passen, obgleich weder DE auf AB, noch DF auf AC past. Es hängt nämlich die Größe des Winkels gar nicht von der Größe seiner Schenkel ab; sondern allein von der Größe der Oefnung zwischen den Schenkeln. Wenn man sich bey A etwa ein Gewinde vorstellt; um welches sich der Schenkel AB umdrehen läst: so wächst der Winkel BAC, wenn man BA von AC weg gegen AG zu drehet, und der Winkel BAC wird kleiner, wenn man BA von AG weg gegen AC zu drehet. Aber wenn gleich AB länger oder kürzer würde; ohne sich um A zu drehen: so würde die Größe des Winkels BAC ungeändert bleiben.

17 §.

Ausgedehnte Größen, die auf und ineinan-

der passen, sind gleich groß. Grade Linien also und gradlinichte Winkel, die auf einander passen, werden gleich groß seyn.

18 §.

Ueberhaupt zu sagen, läst sich dieser Satz nicht umkehren. Es ist falsch, daß alle ausgedehnte Grössen, die gleich groß sind, auch auf einander passen müssen. Wenn aber blos von graden Linien und Winkeln die Rede ist: so ist der Satz auch umgekehrt allgemein wahr, welches folgende Sätze beweisen:

4 F. Wenn eine grade Linie CE auf eine andre AB nicht past: so ist CE entweder kleiner, oder größer, als AB. Legt man nemlich C auf A, und CE auf AB, so deckt CE entweder nur einen Theil von AB, da dann CE < AB (12 § Rech.) oder E fällt über B hinaus, und so deckt ein Theil von CE die ganze Linie AB, daß also nun CE > AB ist (12 § Rech.)

Wenn ein Winkel EDF in einen andern GAC nicht past: so ist wiederum EDF entweder kleiner, oder größer, als GAC. Legt man D auf A, und DF auf AG: so fällt DE entweder zwischen AC und AG,

5.6 F. und so ist EDF < GAC; oder DE fällt über AG hinaus, in AH, wie in der 6 Fig. da dann EDF > GAC ist.

Gleich große grade Linien und gleich große gradlinichte Winkel müssen also nothwendig auf einander passen; denn paste die eine Linie nicht auf der andern, und der eine Winkel nicht auf dem andern: so wäre die eine Linie entweder kleiner, oder größer, und der eine Winkel entweder kleiner, oder größer, als der andre, welches nicht seyn kan, da beyde gleich groß seyn sollen.

19 §.

19 §.

Wenn von einem Punct D einer graden Linie AB eine andre grade Linie DC fortgezogen wird: so kommen zweene Winkel, CDA, und CDB heraus, die eine gemeinschaftliche Spitze D, und einen gemeinschaftlichen Schenkel DC haben, deren übrige Schenkel DA, und DB aber in grader Linie liegen. Solche Winkel heissen Neben-Winkel (contigui, deinceps positi). Stehet die grade Linie EF auf GH so, daß beyde Nebenwinkel EFG und EFH, gleich groß sind, wie in der 8 Fig.: so sagt man EF stehe auf GH grade, oder senkrecht, auch lothrecht, (perpendicularis, normalis) und die beyden gleich großen Nebenwinkel EFH, und EFG heissen rechte Winkel (anguli recti). Wenn beyde Nebenwinkel CDA, GDB, ungleich sind: so sagt man, daß CD auf AB schief stehe, und die Winkel ADC, und BDC heissen schiefe Winkel. Man ist gewohnt, statt des Worts rechter Winkel, der Kürze wegen, den Buchstaben R zu brauchen, und wenn man z. E. setzt EFH = R: so heist dies so viel, es sey EFH ein rechter Winkel. 7 F. 8 F. 7 F.

20 §.

Wenn in der 8 Fig. die Linie EF sich um F gegen FG zu drehet: so wächst der Winkel EFH, und wenn dies so lange fortgehet, bis EF in GF fällt: so ist nun der Winkel EFH um das Stück EFG angewachsen, und folglich der Winkel GFH = CFE + EFH = R + R = 2 R; das will so viel sagen: ein Winkel dessen Schenkel in grader Linie liegen ist doppelt so groß, als ein rechter Winkel, oder ein rechter Winkel ist die Hälfte eines solchen Win- 8 F.

Winkels, dessen Schenkel in grader Linie liegen.

Wenn sich die Linie FE noch weiter herunter dreher, und nun unter FG in Fe fällt: so enthält der erhabene Winkel HFe, nicht allein HFG; sondern überdem noch GFe, und ist folglich größer, als zweene rechte Winkel.

21 §.

7 u. 8. Fig. Alle Winkel, deren Schenkel in grader Linie liegen, wie *ADB*, und *GFH* sind gleich groß.

Beweis. Denn legt man F auf D, und FH auf DB, so muß FG nothwendig auf DA fallen (12 §). Also past der Winkel GFH auf ADB (16 §), und es ist GFH = ADB (17 §).

Hieraus folgt, daß alle rechte Winkel gleich groß sind, denn alle rechte Winkel sind Hälften von solchen Winkeln, deren Schenkel in grader Linie liegen (19 §), und diese Hälften sind gleich groß (44 § Rech.)

Wenn demnach in der 7 Fig. DE auf AB lothrecht stehet: so kan man durch eben den Punct D nicht noch eine andre, auf AB lothrechte Linie ziehen, die von DE unterschieden ist. Denn wäre DC eine solche Linie: so wäre CDB = R = EDB, welches nicht seyn kan.

22 §.

7 F. Zweene Nebenwinkel auf einer graden Linie, wie *ADC* und *CDB* betragen zusammen allemahl so viel, als zweene rechte Winkel.

Beweis. Weil ADB = 2 R (20 §), und ADC + CDB = ADB (19 § Rech.) so ist ADC + CDB = 2 R.

Der Satz erstreckt sich auch auf mehr, als zweene Winkel, die eine gemeinschaftliche Spitze haben, und so an einander liegen, daß jeden zweenen nach einander folgenden ein Schenkel gemein ist, wenn die äussern Schenkel in grader Linie liegen, wie in der 7 Fig. ADE, EDC, CDB sind.

23 §.

Wenn zweene, oder mehr Neben-Winkel 7 F. *BDC*, *CDA*, die Summe von zweenen rechten Winkeln ausmachen: so liegen ihre äussern Schenkel *DB* und *DA* in grader Linie.

Beweis. Wäre BDA keine grade Linie: so verlängere man BD nach F, und setze es sey BDF eine grade Linie: so ist BDC+CDA = 2R = BDF (19 §) = BDC+CDF. Folglich wäre CDA = CDF (28 § Rech.), welches nicht seyn kan.

24 §.

Von einem Punct A kan man nach allen Seiten 9 F. so viel grade Linien AB, AC, AD, AE, AF als man will, in einer Ebene fortziehen; und nun werden alle Winkel die um den Punct *A* herumliegen, die Summe von vier rechten Winkeln ausmachen. Denn man kan eine dieser Linien, welche man will, z. E. FA durch A nach G verlängern: so fallen diese Winkel um A herum zum Theil auf der einen, zum Theil auf der andern Seite von FG. Aber die Summe derer, die auf jeder Seite liegen, beträgt zweene rechte Winkel (22 §). Also machen sie alle die Summe von vier rechten Winkeln aus.

25 §.

Alle Winkel lassen sich nun in drey Classen bringen.

Jeder

Jeder Winkel ist entweder ein rechter, oder ein schiefer Winkel, und der schiefe ist entweder kleiner, oder grösser, als ein rechter Winkel. Winkel, die kleiner sind, als rechte Winkel, heissen spitze Winkel (acuti), und Winkel, die grösser sind, als rechte Winkel, werden stumpfe Winkel (obtusi) genannt. Die stumpfen Winkel kan man wieder eintheilen in solche, die kleiner, eben so groß, oder grösser als zweene rechte Winkel sind. Die erste Art könnte man hole (concavos) die letzte Art erhabene Winkel (convexos) nennen.

7 F. Von zweenen ungleichen Nebenwinkeln CDB, und CDA auf einer graden Linie AB ist also allemahl der eine spitz, und der andre stumpf. Denn es wird einer z. E. CDB $< \frac{1}{2}$ ADB, und der andre CDA $> \frac{1}{2}$ ADB seyn. Also ist CDB $<$ R, und CDA $>$ R (21 §) folglich CDB ein spitzer, CDA aber ein stumpfer Winkel.

26 §.

7 F. Ein Winkel CDA der mit einem andern CDB zusammengenommen zweene rechte Winkel ausmacht, heist des Winkels CDB Ergänzung oder Complement zu zweenen rechten Winkeln. Man findet dieses Complement leicht für jeden gegebenen Winkel CDB, der kleiner, als zweene rechte Winkel ist, wenn man den ~~einen~~ Schenkel BD durch die Spitze D bis A verlängert. Denn so erhält man den Nebenwinkel CDA, welcher die gesuchte Ergänzung ist (22 §).

2 F. Jedem hohlen Winkel BAC stehet ein erhabener Winkel auf der andern Seite entgegen, der mit ihm 4 rechte Winkel ausmacht (24 §). Man kan also den erhabenen Winkel des hohlen Winkels Ergän-

zung

zung oder Complement zu 4 rechten Winkeln nennen, und umgekehrt.

Ein Winkel EDC der mit einem spitzen Winkel CDB einen rechten Winkel ausmacht, kan auf ähnliche Art des Winkels CDB Ergänzung oder Complement zum rechten Winkel heissen. 7 F.

27 §.

Wenn eine grade Linie *BE* eine andre *CD* in *A* schneidet: so sind die an der Spitze *A* entgegengesetzte Winkel *BAC*, und *DAE*, oder die Scheitelwinkel, wie man sie gewöhnlich nennt, gleich groß. 3 F.

Beweis. Weil DAB + BAC = 2 R und DAB + DAE = 2 R (22 §): so ist DAB + BAC = DAB + DAE, folglich BAC = DAE (2 § Rech.)

Wenn also einer von den vier Winkeln um A ein rechter Winkel ist: so ist jeder der übrigen auch ein rechter Winkel, und überhaupt bestimt die Größe des einen, allemahl die Größe der drey übrigen. Denn es ist BAC = DAE und BAD = 2 R − BAC = EAC.

28 §.

Wenn *DAB*, und *BAC* ein paar Nebenwinkel auf der graden Linie *CD* sind, und von *A* aus ist auf der andern Seite von *CD* eine Linie *AE* so gezogen, daß der Winkel *DAE* dem entgegengesetzten *BAC* gleich wird: so liegen *AE* und *AB* in grader Linie. 3 F.

Beweis. Es ist DAB + BAC = 2 R (21 §). Da nun DAE = BAC: so ist auch DAB + DAE = 2 R, und folglich liegt AE mit AB in grader Linie (23 §).

Der II. Abschnitt.

Vom Umfange der ebenen Figuren überhaupt, und insbesondere von der Kreislinie.

29 §.

10F. Wenn man zwischen einem Puncte B, in dem einem Schenkel AB, und einem andern Punct C in dem andern Schenkel AC des gradlinichten Winkels BAC, eine grade Linie BC ziehet: so erhält man eine ebene Fläche, die von allen Seiten durch drey grade Linien AB, BC, AC, begränzt ist. Auf ähnliche Art läst sich eine Ebene durch so viel Linien,
11F. als man will, einschliessen, wie AB CD EF, und es ist nicht nothwendig, daß die Linie AB, BC, u.s.f. grade sind; es können einige derselben krumme, es können auch alle diese Linien krumme Linien seyn. Eine ebene Fläche die von allen Seiten begränzt ist, heist eine ebene Figur, oder hier schlechthin eine Figur, weil in der ebenen Geometrie nie von andern Figuren die Rede ist. Die Linien, welche die Figur umschliessen, heissen ihre Seitenlinien und alle Seitenlinien zusammen machen den **Umfang** der Figur aus.

30 §.

Eine einzige grade Linie allein, oder auch zwo grade Linien allein, können keine Figur umschliessen. Es kan aber gar wohl eine einzige krumme Linie den Umfang einer Figur ausmachen. Sind die Seitenlinien einer Figur alle grade Linien:

so heist sie eine gradlinichte Figur, und wenn eine oder mehr krumme Linien ihren Umfang ausmachen: so nennt man sie eine krumlinichte Figur. Vermischtlinichte Figuren sind diejenigen, deren Umfang zum Theil aus graden, und zum Theil aus krummen Linien bestehet.

Der ganze Umfang einer gradlinichten Figur ist selbst eine Linie, die aber weder in die Classe der graden, noch krummen Linien gehört. Man kan sie eine gebrochne Linie nennen, und hieher gehören überhaupt alle Linien, die aus graden Stücken, unter welchen Winkeln man will, zusammengesetzt sind.

Eine ähnliche Bewandniß hat es mit dem Umfange einer vermischtlinichten Figur. Sowohl dieser Umfang; als auch jede andre Linie, die aus graden und krummen Stücken zusammengesetzt ist, kan eine vermischte Linie heissen.

31 §.

Die Anzahl der Seiten einer Figur ist mit der Anzahl ihrer Winkel allemahl einerley. Wenn nemlich eine grade Linie BA mit einer krummen in einem Puncte B, oder ein Paar krumme Linien EF und ED, in einem Puncte E zusammen stossen: so heissen auch ABC, und DEF ebene Winkel. Es hat aber mit diesen Winkeln eine ganz andre Bewandniß, wie mit den gradlinichten, welches die Folge weiter ergeben wird. Nun schliest jede Seitenlinie AB mit der nechstfolgenden BC einen Winkel ein, und die letzte AF einen mit der nechstletzten FE, und noch einen andern mit der ersten AB. Woraus sich dann ergiebt, daß jede Figur so viele Winkel, als Seitenlinien habe. 11 F.

32 §.

32 §.

Deswegen theilt man alle Figuren nach der Anzahl ihrer Winkel, oder Seitenlinien, in Classen ein, und giebt ihnen Namen, die von der Anzahl ihrer Winkel, oder auch ihrer Seitenlinien hergenommen sind. Woraus man leicht abnehmen wird, was dreyseitige, vierseitige, fünfseitige Figuren, oder Dreyecke, Vierecke, Fünfecke u. s. f. sind. Figuren, die mehr als vier Seitenlinien haben, pflegt man überhaupt Vielecke oder Polygone zu nennen. Man nennt sie schlechthin Dreyecke, Vierecke, oder Polygone, wenn sie gradlinichte Figuren sind. Sonst aber drückt man durch die Beywörter: vermischtlinicht oder krumlinicht, zugleich die Beschaffenheit ihrer Seitenlinien aus.

33 §.

11 F. Wenn ein Punct P innerhalb der Grenzen einer Figur liegt, und man ziehet durch denselben eine grade Linie GH: so wird diese Linie, wenn man sie nach beyden Seiten gehörig verlängert, den Umfang der Figur, wenigstens in zweenen Puncten schneiden. Denn sie muß sowohl auf der einen, als auch auf der andern Seite, den Umfang der Figur einmahl erreichen und sodann durch denselben durchgehen.

Ist also die Figur gradlinicht: so schneidet GH wenigstens zwo von ihren Seitenlinien (14 §). Und

10 F. wenn die Figur ein gradlinichtes Dreyeck ist, wie in der 10 Fig. GH aber gehet durch die Spitze A eines Winkels in diesem Dreyeck: so schneidet GH verlängert gewiß die dem Winkel A gegen überstehende Seite.

34 §.

34 §.

Die grade Linie AB ist unter allen übrigen Linien 12 F.
ACB, ADEB, die man zwischen eben den Puncten
A und B ziehen kan, die kürzeste. Und wenn von A
nach B mehrere andre Linien ACB, ADEB u. s. f. auf
einer Seite der graden Linie AB so gezogen sind, daß
sie insgesamt gegen AB die hohle Seite kehren, und
einander nicht schneiden, auch keine derselben entge-
gengesetzte Wendungen macht, wie AFGB: so sind
diese Linien alle ungleich, und desto größer, je weiter
sie von der graden Linie AB abweichen. So ist hier
ADEB > ACB.

Demnach sind in jedem Dreyeck ABC zwo Seiten- 10 F.
linien AB, BC zusammengenommen größer als die
dritte AC.

35 §.

Die Entfernung eines Orts vom andern ist der kürzeste Weg, den man nehmen muß, um von einem Orte nach den andern zu kommen. Also ist die Entfernung eines Puncts vom andern die grade Linie, die sich zwischen beyden Puncten ziehen läst (34 §).

36 §.

Eine Kreislinie ist eine krumme Linie ABDEF, 13 F.
die eine Ebene so umschließt, daß alle Puncte in der-
selben von einem gewissen Punct C in dieser Ebene
gleich weit entfernt sind. Dieser Punct C heist des
Kreises Mittelpunct und die ebene Figur, welche
von der Kreislinie begränzt wird, die Kreisfläche.
Dieser Kreisfläche Umfang oder Peripherie ist also
die Kreislinie.

Jede grade Linie, die man vom Mittelpunct C
bis zu einem Punct D des Umfangs zieht, heist ein

Halbmesser des Kreises (radius). Und also sind alle Halbmesser eines und eben desselben Kreises gleich groß (35 §). Das Stück der Kreisfläche AFBC, so zwischen zweenen Halbmessern AC, BC und dem dazwischen fallenden Bogen AFB enthalten ist, wird ein Ausschnitt des Kreises (sector) genannt.

37 §.

13 F. Eine grade Linie AB von einem Punct A in der Kreislinie zum andern B, heist eine Sehne, und die beyden Stücke der Kreislinie AFB, AEDB, die der Sehne *AB* zugehörige Bogen. Das Stück der Kreisfläche zwischen der Sehne AB und einem ihrer Bogen AFB, oder AEDB, wird ein Abschnitt (segmentum) des Kreises genannt.

Eine Sehne wie AD, die durch den Mittelpunct C geht, heist des Kreises Durchmesser. Jeder solcher Durchmesser ist doppelt so groß, als des Kreises Halbmesser und eben deswegen sind auch alle Durchmesser eines und eben desselben Kreises gleich groß.

38 §.

Man nimt es in der Geometrie als eine mögliche Voraussetzung an, wenn der Mittelpunct C, und der Halbmesser *CA* eines Kreises gegeben sind, daß man aus diesem Mittelpunct mit diesem Halbmesser den Kreis beschreiben könne.

13 F. Würde die grade Linie CA um den Punct C rund herum gedrehet, bis sie wieder in die vorige Lage gekommen: so würde ihr äusserster Punct A eine Linie beschreiben (9 §), worin alle Puncte von C gleich weit entfernt seyn müsten, weil A von C immer gleich

weit

weit entfernt bleibt. Dies würde also die Kreislinie seyn, und die Ebene, worüber CA fortgeführet ist, die Kreisfläche (36 §). Auf diese Betrachtung gründet sich die Art, wie man in der Ausübung vermittelst des bekannten Cirkel-Instruments, die Kreislinie verzeichnet.

39 §.

Jeder Punct G, dessen Entfernung GC vom Mittelpunct des Kreises kleiner ist, als des Kreises Halbmesser, liegt innerhalb der Kreisfläche: und jeder Punct H, dessen Entfernung HC vom Mittelpunct grösser als der Halbmesser ist, liegt ausserhalb der Kreisfläche. Denn CG verlängert trift die Peripherie in D, und G liegt auf dem Halbmesser, der allemahl ganz in der Kreisfläche liegt. Wenn aber CH grösser als der Halbmesser CD ist: so geht die Kreislinie durch D, und H bleibt ausserhalb dieser Grenze der Kreisfläche liegen. 13 F.

Jede grade Linie MN also, die durch einen Punct G gezogen ist, dessen Entfernung vom Mittelpunct kleiner, als der Halbmesser ist, muß die Kreislinie wenigstens in zweenen Puncten schneiden (33 §). Eben dies gilt demnach auch vom Durchmesser eines Kreises.

40 §.

Ein Durchmesser AD aber kan die Kreislinie auch nicht in mehr, denn zweenen Puncten A und D schneiden. Wäre H ein dritter Durchschnittspunct: so müste CD = CH seyn (37 §), welches falsch ist. Auf einer Seite des Puncts C können in der graden Linie AD nicht zween unterschiedene Puncte D und H in gleicher Entfernung liegen (18 §). 13 F.

Halbmesser des Kreises (radius). Und also sind alle Halbmesser eines und eben desselben Kreises gleich groß (35 §). Das Stück der Kreisfläche AFBC, so zwischen zweenen Halbmessern AC, BC und dem dazwischen fallenden Bogen AFB enthalten ist, wird ein Ausschnitt des Kreises (sector) genannt.

37 §.

13 F. Eine grade Linie AB von einem Punct A in der Kreislinie zum andern B, heist eine Sehne, und die beyden Stücke der Kreislinie AFB, AEDB, der Sehne *AB* zugehörige Bogen. Das Stück der Kreisfläche zwischen der Sehne AB und ihrer Bogen AFB, oder AEDB, wird ein Abschnitt (segmentum) des Kreises genannt.

Eine Sehne wie AD, die durch den Mittel C geht, heist des Kreises Durchmesser. solcher Durchmesser ist doppelt so gro Kreises Halbmesser und eben deswegen alle Durchmesser eines und eben de ses gleich groß.

38 §.

Man [illegible] der Geometr [illegible] der [illegible] es [illegible] reis

weit entfernt bleibe. Dies mit
seyn, und die Ebene, worin
die Kreisfläche (36 §).
gründet sich die Art, wie
mittelst des bekannten
linie verzeichnet.

Jeder Punct G, dessen
telpunct des Kreises
messer, liegt innerhalb
Punct H, dessen Entfernung
größer als der Halbmesser,
Kreisfläche. Denn CG
phetis ist D, und G liegt
allemahl ganz in der Kreisfläche
CH größer als der halbe
Kreislinie durch D, mit
Grenze der Kreisfläche

Jede gerade
G gezogen ist,
kleiner, als der
wenigstens
Eben dies gilt
Kreises

ht,
n c
ird
l in
D.
d
ver-
BD,
Punct B 14 F.
Kreislinie
eiben, das
eben so groß
Denn man
ie F aber für
Kreislinie (38
AE nur in zwei-
nd nun ist sowohl
eine grade Linie F zu
trahirt jene von dieser,
wird AC = AB + BC
B − BD = AB − F.

43 §.

innerhalb, und ein andrer
einer Figur GDHC liegt, u
der Umfang einer andern Figu
die Periphe
n Puncten
Theil im

Dafern C der Mittelpunct eines Kreises AFBE ist: so kan kein andrer Punct G in der Kreisfläche von allen Puncten des Umfangs gleich weit entfernt seyn. Denn die grade Linie durch C und G ist ein Durchmesser, und schneidet die Kreislinie nur in A und D. Es wird aber CA = CD (36 §) und GA > CA, also auch GA > CD; und weil CD > GD, so ist GA > GD.

Das Stück GA ist unter allen graden Linien, die man von G bis an die Kreislinie ziehen kan, die gröste, und GD unter allen die kleinste. Es sey GE eine solche Linie: so ziehe man CE, und es ist CG + CE > GE (34 §), oder CG + CA > GA, d. i. GA > GE. Weil aber CE < CG + GE und CE = CD: so ist CD < CG + GE, folglich CD − CG < GE (28 §. R.), oder GD < GE.

41 §.

13 F. Jeder Durchmesser *AD* theilt die Kreisfläche sowohl, als die Kreislinie in zwey gleiche Stücke, die man Halbkreise nennet.

Beweis. Man stelle sich vor: Es werde AFBD um AD herum gedrehet, und das Stück AFBD auf AED gelegt, so daß die Linie AD ungeändert bleibt: so fällt jeder Punct B auf einen zugehörigen Punct E. Denn man ziehe BC, und es sey DCE = DCB: so fällt CB in CE, und B in E (18 §). Also past der Bogen AFBD auf dem Bogen AED, und die Fläche ACDBF auf der Fläche ACDE (16 §), und sowohl beyde Bogen, als auch beyde Flächen sind gleich groß (17 §).

Wenn demnach eine Kreislinie bey A und D in zweene gleiche Theile getheilt ist, und man ziehet AD:

so

so ist AD ein Durchmesser. Denn wäre dies nicht, so müste der Mittelpunct ausser AD irgendwo in c liegen, und denn könnte man Ac ziehen. Dies wird ein Durchmesser seyn, der die Kreislinie nochmahl in d trift. Denn aber wäre der Bogen AEd > AED. Da nun AED = ABD seyn soll: so wäre AEd > ABD, und weil auch ABd = AEd seyn müste, vermöge des erwiesenen Satzes: so wäre ABd > ABD, welches nicht seyn kan.

42 §.

Wenn auf einer Linie AE irgendwo ein Punct B 14 F. gegeben ist: so kan man vermittelst der Kreislinie allemahl ein Stück von dieser Linie abschneiden, das in dem gegebenen Punct B anfängt, und eben so groß ist, als eine andre gegebene Linie F. Denn man nehme B für den Mittelpunct, die Linie F aber für den Halbmesser, und verzeichne eine Kreislinie (38 §): so schneidet diese die grade Linie AE nur in zweenen Puncten C und D (40 §), und nun ist sowohl BC, als auch BD = F (36 §).

Auf eben die Art addirt man eine grade Linie F zu einer gegebenen AB, oder subtrahirt jene von dieser, wenn F < AB ist. Denn es wird AC = AB + BC = AB + F, und AD = AB − BD = AB − F.

43 §.

Wenn ein Punct P innerhalb, und ein andrer Q 14 F. ausserhalb der Fläche einer Figur GDHC liegt, und durch P und Q gehet der Umfang einer andern Figur LMNO: so schneiden sich die Peripherien beyder Figuren wenigstens in zweenen Puncten, und der einen Figur Umfang fällt zum Theil innerhalb, zum

Theil ausserhalb der andern Figur. Ein Punct P, welcher den Umfang der Figur beschreibt, indem er durch LMNO fortgeht, muß wenigstens zweymahl durch die Peripherie der Figur GDHC durchgehen, einmahl wenn er von P durch L und M nach Q gehet, und das andre mahl, wenn er von Q durch N und O nach P zurück komt.

Dies wird also auch richtig seyn, wenn beyde Figuren Kreise sind.

44 §.

15 F. Wenn man mit zwoen Seiten *AC* und *BC* eines Dreyecks *ABC* Kreislinien beschreibt, deren Mittelpuncte *A* und *B* die Endpuncte der dritten Seitenlinie sind; so schneiden diese Kreise einander.

Beweis. Jeder Kreis schneidet AB zweymahl, und nicht mehr (40 §), der eine in F und G, der andre in E und H. Nun hat man AE = AC, und BF = BC. Aber AB < AC + BC (34 §), also auch AB < AE + BF, oder AF < AE. Demnach liegt F in der Fläche des Kreises CED (39 §). Wenn nun AB verlängert den Kreis CFD zum zweyten mahl in G trift: so ist AG = AB + BC, also AG > AC (34 §). Folglich liegt G ausserhalb des Kreises CED (39 §) und beyde Kreise schneiden einander (43 §).

45 §.

16 F. Kreislinien und Kreisflächen sind gleich groß, wenn ihre Halbmesser gleich groß sind.

Beweis. Wenn man die eine Kreisfläche so auf die andre legt, daß beyde Mittelpuncte zusammenfallen; so fällt in die Augen, daß auch beyde Peripherien auf einander fallen müssen. Sind CA, FD ein

ein paar Halbmesser: so sey der Winkel EFD = BCA. Man lege F auf C und FD auf CA: so fällt D in A, und FE in CB, imgleichen E in B (18 §). Demnach fällt jeder Punct der einen Peripherie auf einen zugehörigen Punct der andern, und die Kreislinien sowohl, als die Kreisflächen passen auf einander (16 §).

46 §.

17 F. Kreislinien, die mit verschiedenen Halbmessern CA, CE aus einerley Mittelpunct C beschrieben sind, heissen Concentrische Kreise, so wie alle Kreise, die verschiedene Mittelpuncte haben Eccentrische Kreise genannt werden.

Concentrische Kreislinien können einander nicht schneiden, auch sonst in keinem einzigen Punct zusammenstossen. Widrigenfalls würde die grade Linie von dem gemeinschaftlichen Punct bis zum Mittelpunct gezogen, sowohl des einen, als auch des andern Kreises Halbmesser seyn, und beyde Kreislinien würden völlig zusammen fallen (45 §).

Kreisflächen sind ungleich groß, wenn die Halbmesser ungleich sind, und der kleinere Halbmesser giebt einen kleinern Kreis, als der größere. Gleiche Kreise haben also gleiche Durchmesser.

Wenn ein paar Kreislinien einander schneiden; oder sonst auf irgend eine Art zusammenstossen: so sind es Eccentrische Kreislinien.

15 F. Geht eine Kreislinie durch zweene Puncte C und D einer andern, und man zieht zwischen ihren Mittelpuncten A und B eine grade Linie AB: so kan diese durch keinen von beyden Durchschnittpuncten gehen. Wäre ACB eine grade Linie: so wäre AD + BD > AC + BC (34 §), welches nicht seyn kan,

weil AD=AC, und BD=BC ist (36 §). Demnach wird AB die Seite eines Dreyecks wie ACB oder ABD im 44 §, und ein Kreis fällt zum Theil innerhalb, zum Theil ausserhalb des andern.

47 §.

Eine Kreislinie berühret die andre, wenn beyde zwar zusammen stossen, übrigens aber der eine Kreis entweder ganz ausserhalb, oder ganz innerhalb des andern fällt. Im ersten Fall berührt einer den andern von aussen, im andern Fall, von innen.

Dergleichen Kreislinien sind also allemahl Eccentrisch (46 §), und die Berührung kan nur in einem Puncte geschehen. Denn gebe es in beyden zweene gemeinschaftliche Puncte: so schnitten die Kreise einander (46 §).

48 §.

18 F. Es sind zweene Puncte *A* und *B* gegeben, man soll aus ihnen, als Mittelpuncten, ein paar Kreise beschreiben, die sich von aussen berühren.

Aufl. Man ziehe diese Puncte mit einer graden Linie AB zusammen, nehme nach Gefallen zwischen A und B einen Punct C auf dieser Linie, und beschreibe mit dem Halbmessern AC und BC ein paar Kreise CKE und CFD: diese werden einander in C, und zwar von aussen berühren.

Beweis. Daß beyde Kreislinien durch C gehen, ist für sich klar. Aber ausser C haben sie keinen Punct gemein. Denn es sey H noch ein andrer Punct in beyden Kreislinien ausserhalb der Linie AB: so kan man AH und BH ziehen, und es wird AHB ein Dreyeck, worin AH + BH > AB (34 §). Aber

es

es muß AH = AC, und BH = BC seyn (36 §). Also wäre AC + BC > AB, welches unmöglich ist. In der Linie AB kan ein solcher Punct auch ausser C nicht liegen, weil diese Linie jede Kreislinie nur noch einmahl schneidet in D oder E. Aber es ist vermöge der Verzeichnung, weil C zwischen A und B genommen worden, nothwendig AD > AC. Also liegt D ausserhalb des Kreises CKE. Eben so liegt jeder Punct F des Kreises CFD ausserhalb des andern CKE. Man ziehe nemlich AF und BF: so ist AF + BF > AC + CB (34 §). Aber BF = CB, also AF > AC, folglich liegt F ausser CKE (39 §).

49 §.

Aus den gegebenen Puncten *A* und *B* ein paar Kreise zu beschreiben, die einander von innen berühren. 19 F.

Auflösung. Nachdem man AB gezogen, und beliebig verlängert hat: so nehme man C ausserhalb A und B auf dieser Linie, und beschreibe mit den Halbmessern AC und BC die Kreise CFD und CKE: so wird der kleinere CFD den größern CKE von innen berühren.

Beweis. Beyde Kreislinien gehen durch C und haben sonst keinen andern Punct H gemein, der ausser AB liegt. Man könnte sonst AH und BH ziehen, und es würde AB + BH > AH oder AB + BC > AH d. i. AC > AH seyn, so dem 36 § entgegen ist. Auch in AB kan kein Punct ausser C liegen, durch welchen beyde Kreislinien durchgehen könnten. Denn AB schneidet jeden Kreis nur nochmahl (40 §), nemlich CFD in D und CKE in E. Aber A liegt nothwendig zwischen C und E, und B auf eben der

Seite von A, wo C liegt, wenn nemlich B des kleinern Kreises Mittelpunct ist. Da also AC > BC: so ist AE > BD, folglich AE + AB > BD, oder BE > BD. Demnach liegt E nothwendig ausser CFD. Uebrigens liegt jeder Punct F des Kreises CFD innerhalb des andern CKE. Man ziehe AF und BF: so ist AF < AB + BF (34 §), oder AF < AB + BC, also AF < AC und F liegt innerhalb CKE (39 §).

50 §.

18 Wenn zweene Kreise *CFD* und *CKE* ein
19 F. ander in *C* berühren, es mag von innen, oder von aussen geschehen: so müssen ihre Mittelpuncte *A*, *B* mit dem Berührungspunct *C* in grader Linie liegen.

Beweis. Dafern der Mittelpunct des Kreises CKE nicht in der graden Linie BC liegt, und B des Kreises CFD Mittelpunct ist: so sey G des Kreises CKE Mittelpunct. Nun kan man BG, und GC ziehen: so ergiebt sich ein Dreyeck B GC, und aus den Mittelpuncten B und G sind mit den Halbmessern BC und GC die Kreise CFD, CKE beschrieben. Diese schneiden einander (44 §), welches der Voraussetzung entgegen ist.

51 §.

Die Kreislinie ist unter allen krummen Linien die einzige, welche Euclides bey der Auflösung geometrischer Aufgaben gebraucht hat. Die alten griechischen Geometer glaubten Anfangs, daß keine andre krumme Linie verdiene in der Geometrie aufgenommen zu werden, und hielten dafür, daß keine Aufgabe geometrisch aufgelöset sey, bey der man andre krum-

krumme Linien, als die Kreislinie, zu Hülfe genommen habe. Ihnen kamen aber bald solche Aufgaben vor, die sie vermittelst der graden und Kreislinien allein nicht auflösen konnten, und sie wurden dadurch bewogen, auch über die Eigenschaften einiger andern krummen Linien Untersuchungen anzustellen. Jetzt nennt man denjenigen Theil der Geometrie, worin mit dem Euclides keine andre krumme Linie, als die Kreislinie, bey der Auflösung der Aufgaben gebraucht wird, die Elementar-Geometrie. Der Inbegrif aller übrigen Lehren von den ausgedehnten Größen die sich aus den Eigenschaften der graden Linie und Kreislinie allein nicht herleiten lassen, macht die höhere Geometrie aus.

Der III. Abschnitt.

Von den Dreyecken und Parallel-Linien.

52 §.

Es ist ein Winkel *BAC* gegeben nebst zwoen graden Linien *D* und *E*; man soll aus diesen dreyen Stücken ein solches Dreyeck machen, welches den Winkel *BAC* enthält, und worin die beyden Seiten, die den Winkel *BAC* einschliessen, so groß als die gegebenen Linien *D* und *E* sind. 10 F.

Aufl. Man schneide von der Spitze des Winkels A angerechnet auf dem einen Schenkel ein Stück AB = D, und auf dem andern ein Stück AC = E

ab

ab (42 §), und ziehe die grade Linie BC (9 §): so hat man das verlangte Dreyeck ABC.

Weil die Kreise, welche man braucht die Puncte B und C zu finden, die Schenkel des Winkels auch in b und c schneiden (40 §), und der Winkel BAC = bAc ist (27 §): so kan man auch bc ziehen, und das Dreyeck Abc thut der Aufgabe ebenfalls ein Genüge.

53 §.

Wenn die gegebenen Seiten D und E gleich groß sind: so werden auch AB und AC gleich groß, und man erhält ein Dreyeck, das zwo gleiche Seiten hat. Ein Dreyeck von dieser Art heißt ein gleichschenklichtes Dreyeck (aequicrurum, isosceles). Die beyden gleichen Seiten desselben heissen sodann die gleichen Schenkel, und man sieht gewöhnlich die dritte, den vorigen ungleiche Seite, als die Grundlinie des Dreyecks an.

Wenn alle drey Seiten eines Dreyecks gleich groß sind: so heißt es ein gleichseitiges Dreyeck (aequilaterum, isopleuron). Die übrigen Dreyecke, die lauter ungleiche Seiten haben, heissen ungleichseitige Dreyecke (scalena).

54 §.

20 F. Wenn zwey Dreyecke *ABC* und *DEF* einen gleichen Winkel haben; so, daß $B = E$, und zwo gleiche Seiten $AB = DE$, $BC = EF$, die den gleichen Winkel einschliessen; so sind die Flächen dieser Dreyecke nicht allein; sondern auch die übrigen Seiten, und die Winkel gleich groß, die den gleichen Seiten gegenüberstehen.

Beweis.

Beweis. Man lege das Dreyeck DEF auf ABC so, daß E auf B, und EF auf BC falle: so muß F auf C, ED auf BA, und D auf A fallen (18 §). Folglich fällt DF mit AC zusammen (12 §) und das Dreyeck DEF past auf ABC, DF auf AC, der Winkel D auf A, und F auf C.

Also sind die beyden Dreyecke ABC und Abc in der zehnten Figur nicht der Größe; sondern nur der Lage nach unterschieden. 10 F.

55 §.

In jedem gleichschenklichten Dreyeck *ABC* sind die Winkel, an der Grundlinie *ABC* und *ACB* gleich groß, die den gleichen Schenkeln *AB* und *AC* entgegen stehen. 21 F.

Beweis. Man verlängere die gleichen Schenkel AB und AC unter der Grundlinie, nehme auf AB unter BC einen beliebigen Punct D, und mache AE=AD (42 §): so ist auch BD=CE (28 § R.) Nun hat man in den Dreyecken ABE und ACD den Winkel A=A, die Seite AB=AC, und AE=AD; folglich ist BE=DC und ABE=ACD, wie auch AEB=ADC (54 §). Dieserwegen hat man auch in den Dreyecken BDC und BEC, aus den eben erwiesenen Sätzen AEB=ADC, und BE=DC, noch CE=BD. Also ist der Winkel CBE=BCD (54 §), und weil ABE=ACD war: so wird ABE − CBE=ACD − BCD (28 § Rech.) oder ABC=ACB.

Im gleichseitigen Dreyeck sind demnach alle drey Winkel gleich groß. Denn wäre auch AB=BC: so wäre A=ACB, folglich auch A=ABC.

56 §.

56 §.

22. Wenn im Dreyeck *ABC* zweene Winkel
23 F. *ACB* und *B* gleich groß sind; so sind auch die gegenüberstehenden Seiten *AB* und *AC* gleich groß.

Beweis. Es kan AB weder größer, noch kleiner,
22 F. als AC seyn. Wäre AB ▷ AC: so müste ein Theil von AB so groß, als AC seyn. Man setze demnach, es sey BD = AC, und ziehe CD: so ist in dem Dreyecken ABC und DBC der Winkel ACB = B, überdem BC = BC und AC = BD; folglich müste das Dreyeck ABC = DBC seyn (54 §), welches nicht seyn kan.

23 F. Wäre AB ◁ AC: so müste man AB über A hinaus nach E verlängern können, bis BE = AC würde. Man ziehe EC: so ist wiederum in den Dreyecken ABC, und EBC der Winkel ACB = B, überdem BC = BC, und AC = BE. Also müste das Dreyeck ABC = EBC seyn (54 §), welches unmöglich ist. Weil also weder AB ▷ AC, noch AB ◁ AC seyn kan: so ist nothwendig AB = AC.

Sind demnach alle drey Winkel im Dreyeck *ABC* gleich groß: so ist es gleichseitig. Denn wäre auch BAC = B: so wäre vermöge des erwiesenen Satzes BC = AC. Also auch BC = AB.

57 §.

24 F. Eine grade Linie *CD*, welche die Grundlinie eines gleichschenklichten Dreyecks *ABC* bey *D* halbirt, und durch des entgegengesetzten Winkels Spitze geht, halbirt diesen Winkel nebst dem ganzen Dreyeck, und steht auf der Grundlinie senkrecht.

Be-

Beweis. Weil der Winkel A = B, und überdem AC = BC, AD = BD: so ist das Dreyeck DAC = DBC, der Winkel ACD = BCD, und ADC = BDC (54 §). Folglich CD auf AB senkrecht (19 §).

Wenn demnach ein Durchmesser EF des Kreises 25 F.
AFBE die Sehne AB in D halbirt: so steht der Durchmesser auf AB senkrecht, und halbirt den Winkel ACB des Ausschnitts ACBE.

Zwo Sehnen AB, GH eines Kreises, die nicht beyde Durchmesser sind, und einander in D schneiden, können einander nicht gemeinschaftlich halbiren. Denn CD würde auf beyden zugleich senkrecht seyn wieder den 27 §. Fiele GH in EF: so fällt von selbst in die Augen, daß DF > CF, also auch DF > CE und ferner DF > DE sey.

58 §.

Eine grade Linie *CD*, welche den der Grund- 24 F.
linie *AB* eines gleichschenklichten Dreyecks *ABC* gegenüber stehenden Winkel *ACB* halbirt, steht auf der Grundlinie lothrecht und halbirt die Grundlinie *AB*, nebst den ganzen Dreyeck *ABC*.

Beweis. Weil ACD = BCD, CD = CD und AC = BC: so ist AD = BD, das Dreyeck CAD = CBD, und der Winkel ADC = BDC (54 §). Also CD auf AB lothrecht (19 §).

Ein Durchmesser CF also, der den Winkel ACB 25 F.
des Ausschnitts ACBE halbirt, steht auf der Sehne AB lothrecht, und halbirt eben diese Sehne.

59 §.

Eine grade Linie, welche die Grundlinie *AB* des gleichschenklichten Dreyecks *ABC* hal-

birt, und auf derselben lothrecht stehet, geht durch die Spitze C des der Grundlinie *AB* gegenüberstehenden Winkels *ACB*, und halbirt diesen Winkel.

Beweis. Wenn DE die Grundlinie AB halbirt, und auf ihr senkrecht stehet, aber nicht durch C gehet: so ziehe man CD, und es wird auch CD auf AB lothrecht seyn (57 §), welches doch nicht angenommen ist.

Eine grade Linie EF also, welche die Sehne AB des Kreises AEBF senkrecht in D halbirt, geht nothwendig durch den Mittelpunct C, und halbirt den Winkel ACB des Ausschnittes AEBC.

60 §.

26 F. Wenn in einem Dreyeck *ABC* eine Seite *BC* verlängert wird: so ist der Winkel *ACD* ausserhalb des Dreyecks größer, als jeder von den beyden Winkeln *BAC*, oder *ABC*, die dem vorigen innerhalb des Dreyecks gegenüberstehen.

Beweis. Es sey AC bey E in zweene gleiche Theile getheilt, und die grade Linie BE gezogen; diese verlängere man durch E nach F, und nehme EF = BE, ziehe hierauf CF. Nun ist in den Dreyecken ABE, und FCE der Winkel AEB = CEF (27 §), die Seite AE = CE, und BE = FE, also der Winkel ECF = BAC (54 §). Da nun ACD > ECF: so ist auch ACD > BAC (13 § Rech.). Man verlängere auch AC nach G: so ist vermöge des Beweises BCG > ABC, und weil BCG = ACD (27 §): so ist auch ACD > ABC.

27 F. Wenn demnach von einem Punct D innerhalb der Fläche eines Dreyecks ABC nach den Endpuncten einer

einer Seitenlinie BC, grade Linien DB und DC gezogen sind: so schliessen diese einen grösern Winkel BDC ein, als die übrigen beyden Seiten BA, und AC. Denn es sey BD bis E verlängert: so ist BDC ▷ DEC, und DEC ▷ BAC, also BDC ▷ BAC.

61 §.

Eine grade Linie von der Spize des Win- 24 F.
kels C, der im gleichschenklichten Dreyeck *ABC* der Grundlinie gegenüber stehet, auf diese Grundlinie Perpendicular gezogen, halbirt diese Grundlinie.

Beweis. Wenn CF auf AB senkrecht ist, und es ist nicht AF = FB: so sey AD = DB, und es wird auch CD auf AB senkrecht seyn (57 §). Also ist CFB = R = CDB, welches dem 60 § entgegen ist.

Ein Durchmesser EF des Kreises also, der auf 25 F.
der Sehne AB in D senkrecht stehet, halbirt die Sehne in D, und den Winkel ACB.

62 §.

Zweene Winkel, welche im Dreyeck zwoen ungleichen Seiten gegenüber stehen, sind ungleich groß, und zwar stehet der größere Winkel der größern Seite, der kleinere aber, der kleinern entgegen.

Beweis. Wenn im Dreyeck ABC die Seite AC 28 F.
▷ AB ist; so sey AD = AB (12 § Rech.) und man ziehe BD: so ist der Winkel ABD = ADB (55 §). Aber ABC ▷ ABD, also ABC ▷ ADB. Da nun ADB ▷ C (60 §) so ist ABC ▷ C (13 §. Rech.)

Wenn also zweene Winkel im Dreyeck ungleich sind: so steht allemahl auch dem größern Winkel die

sere Seite, und dem kleinern Winkel die kleinere Seite entgegen. Denn ist der Winkel ABC > C: so kan nicht AC = AB seyn, weil sonst ABC = C wäre (55 §). Es kan auch nicht AC < AB seyn, weil sonst ABC < C seyn müste, wie eben bewiesen ist. Also muß AC > AB seyn, wenn ABC > C ist.

25F. Ist D ein Punct in der Kreisfläche, der vom Mittelpunct C unterschieden ist, und man ziehet durch C und D den Durchmesser EF: so sind alle grade Linien DA, DG die man auf einer Seite des Durchmessers von D nach dem Umfange des Kreises ziehen kan, ungleich groß, und wenn der Bogen GF < AF ist: so ist DG > DA. Denn man ziehe CA, CG, und AG: so ist CAG = CGA (55 §). Aber DAG > CAG, also DAG > CGA. Ueberdem CGA > DGA, also DAG > DGA und DG > DA.

63 §.

29. Wenn zwo Seiten *AB* und *AC* eines Drey-
30. ecks *ABC* so groß sind, als zwo Seiten eines
31F. andern Dreyecks *DEF*, nemlich *AB* = *DE*, und *AC* = *DF*, aber der Winkel *BAC*, den jene einschliessen, ist größer, als der Winkel *EDF*, den die leztern einschliessen: so ist auch die dritte Seite *BC* des ersten Dreyecks größer, als die dritte Seite *EF* des leztern.

Beweis. Wenn an DE in dem Punct D ein Winkel EDG = BAC angesetzt würde: so müste DF zwischen DE und DG fallen, weil EDG > EDF seyn soll. Man nehme DG = AC = DF, und ziehe EG: so wird EG = BC (54 §) und man hat drey Fälle zu unterscheiden.

1) Es kan die Linie EG mit EF zusammenfallen, wie in der 29 Fig. und dann ist für sich klar, daß EG $\succ$ EF, folglich BC $\succ$ EF sey. 29 F.

2) Es kan EG unter EF fallen, wie in der 30 Fig. Ziehet man sodann noch FG: so ist EG+DG $\succ$ EF+DF (34 §) und weil DG=DF: so ist EG $\succ$ EF wie vorhin. 30 F.

3) Es kan EG über EF fallen, wie in der 31 F. Ziehet man wiederum FG: so ist DFG=DGF (55 §), und weil DGF $\succ$ EGF: so ist auch DFG $\succ$ EGF. Es ist ferner EFG $\succeq$ DFG, also EFG $\succ$ EGF, und EG $\succ$ EF (62 §). Also BC $\succ$ EF. 31 F.

Wenn also zwo Seiten eines Dreyecks ABC so groß sind, als zwo Seiten eines andern DEF, nemlich AB=DE und AC=DF, aber die dritte BC des ersten ist größer, als die dritte EF des zweyten: so ist der Winkel BAC, welcher der größern BC gegenüber steht, größer als der Winkel EDF, welcher der kleinern entgegen steht. Denn wäre BAC=EDF: so müste BC=EF seyn (54 §) und wäre BAC $\prec$ EDF: so müste BC $\prec$ EF seyn, wie eben bewiesen worden, welches beydes wider die Voraussetzung ist. Also ist BAC $\succ$ EDF, wenn BC $\succ$ EF ist.

64 §.

Wenn die drey Seiten eines Dreyecks *ABC* so groß sind, als die drey Seiten eines andern *DEF*, nämlich *AB=DE*, *BC=EF*, *AC=DF*: so sind die Dreyecke selbst gleich groß, und die Winkel, welche den gleichen Seiten gegenüber stehen. 20 F.

Beweis. Weil AB=DE, AC=DF, und überdem BC=EF: so ist der Winkel BAC=EDF. Denn

wäre BAC > EDF, oder BAC < EDF: so wäre im ersten Falle BC > EF, und im zweyten Falle BC > EF (63 §), welches beydes der Voraussetzung entgegen ist. Also ist BAC = EDF, folglich das Dreyeck ABC = DEF, auch die Winkel B = E, C = F (54 §).

Legt man das eine Dreyeck DEF auf das andre so, daß E auf B, und EF auf BC fällt: so passen die Dreyecke auf einander. Deswegen kan man auf einer Seite einer graden Linie BC als einer Grundlinie nicht zwey unterschiedene Dreyecke setzen, wenn auch die übrigen beyden Seiten gleich groß seyn, und die gleichen Seiten an einerley Endpunct der Grundlinie BC liegen sollen. Diese letzte Einschränkung ist deswegen nöthig, weil DEF auf ABC nicht nothwendig passen würde, wenn man DEF verkehrt auf ABC so legte, daß F in B, und E in C fiele. Denn die Winkel B und F werden ungleich seyn, wenn AB und AC, und also auch DE, und DF ungleich sind (62 §).

65 §.

15 F. Ein Kreis *CFDG* kan einen andern *CEDH* nicht in mehr, als zwey Puncten schneiden, und diese Puncte liegen auf verschiedenen Seiten der graden Linie *AB*, welche durch beyder Kreise Mittelpuncte *A* und *B* gehet.

Beweis. In der Linie AB kan kein Durchschnittspunct liegen, weil Kreise, die durch einen Punct dieser Linie gehen, einander nur berühren (48. 49 §). Wenn nun ein Durchschnittspunct ausser AB in C liegt: so kan auf eben der Seite von AB kein andrer Durchschnittspunct liegen. Wäre c ein solcher Durchschnittspunct: so hätte man zwey Dreyecke

ABC und ABc worin AC = Ac, und BC = Bc seyn müste (36 §) und diese Dreyecke fielen nicht zusammen, welches dem 64 § entgegen ist. Nun ist aber gewiß noch ein Durchschnittspunct da (43 §), also muß dieser auf der andern Seite von AB fallen. Und, wenn dies D ist: so fällt auf dieser Seite, vermöge des vorigen wiederum kein neuer Durchschnittspunct. Demnach kan es überhaupt nicht mehr, als zweene Durchschnittspuncte geben.

66 §.

Die gemeinschaftliche Sehne *CD* zweener 15 F.
Kreise, die einander in *C* und *D* schneiden, wird von der graden Linie *AB* die durch die Mittelpuncte gehet, senkrecht halbirt.

Beweis. Wenn man AC, AD, BC, BD ziehet: so hat man AC = AD, BC = BD, und AB = AB, folglich ist der Winkel CAB = DAB (64 §). Also halbirt AB den Winkel des Ausschnitts ACED, und halbirt deswegen zugleich die Sehne CD senkrecht (58 §).

67 §.

Es sind drey grade Linien α, β, γ gegeben, 15 F.
man soll an der gegebenen Linie *AG* ein Dreyeck setzen, dessen eine Seite = α ist, und sich auf dieser Linie von *A* nach *G* erstrecket. Von den übrigen beyden Seiten aber soll die, so durch *A* gehet = β, und die, so durch das andere Ende der Grundlinie gehet = γ seyn, vorausgesetzt, daß jede zweene dieser Linien α, β, γ, zusammen gröser als die dritte sind.

Aufl. Man mache AB = α (42 §) und verzeichne mit dem Halbmesser = β aus dem Mittelpunct A,

mit dem Halbmesser $= \gamma$ aber aus B einen Kreis: so werden beyde Kreislinien einander schneiden, und es wird auf jeder Seite von AB ein Durchschnittspunct fallen. Sind C und D diese Puncte: so kan man AC und BC, oder auch AD und BD ziehen, und man hat in beyden Fällen ein Dreyeck ACB, oder ADB wie es verlangt worden.

Beweis. Daß AC oder AD $= \beta$, und BC oder BD $= \gamma$ sey, erhellet aus dem 36 §, und daß beyde Kreise einander gewiß schneiden, wenn jede zwo von den gegebenen Linien α, β, γ, zusammen größer, als die dritte sind, ergiebt sich aus dem Beweise des 44 §.

Wenn zwo von den gegebenen Seiten β und γ gleich groß sind: so erhält man auf der gegebenen Grundlinie AB ein gleichschenklichtes Dreyeck, da denn jeder Schenkel β oder γ größer, als die halbe Grundlinie seyn muß. Sind aber alle drey gegebene Seiten gleich groß: so wird das Dreyeck gleichseitig, welches man also auf einer jeden gegebenen Grundlinie leicht verzeichnet.

68 §.

32 F. **Durch einen gegebenen Punct C auf der gegebenen Linie *AB* eine senkrechte Linie zu ziehen.**

Aufl. Man schneide auf beyden Seiten von C ein paar Stücke CD = CE ab (42 §) und setze auf DE ein gleichschenklichtes Dreyeck DEF: so ist die durch C und F gezogene grade Linie auf AB senkrecht (57 §).

In der Ausübung ist es nicht nothwendig die beyden Kreise mit den Halbmessern DF und EF, welche

che zur Verzeichnung nöthig sind (67 §), ganz zu zeichnen. Es dienen schon ein paar kleine Bogen davon den Durchschnittspunct F zu finden, den man eigentlich sucht. Dies ist auch bey den folgenden Aufgaben zu merken, wo ähnliche Verzeichnungen vorkommen.

69 §.

Einen gegebenen Winkel *ABC* zu halbiren. 33 F.

Aufl. Man nehme auf beyden Schenkeln ein paar gleiche Stücke BD = BE, und setze auf DE ein gleichschenklichtes Dreyeck DFE: so halbirt BF den Winkel ABC. Weil nemlich BD = BE, DF = EF, BF = BF; so ist DBF = EBF (64 §).

70 §.

Eine grade Linie *AB* mit einer andern senkrecht zu halbiren. 34 F.

Aufl. Man setze auf AB ein gleichschenklichtes Dreyeck ACB, und halbire den gegen AB über stehenden Winkel ACB (69 §): so steht die Linie CE, die den Winkel ACB halbirt, auf AB senkrecht, und halbirt AB (58 §).

71 §.

Durch einen gegebenen Punct *A* einer graden Linie *AB* eine andre grade Linie zu ziehen, die mit *AB* einen gegebenen Winkel = C einschliest. 35 F.

Aufl. Man nehme auf jeden Schenkel des gegebenen Winkels C ein paar beliebige Puncte D und E, und ziehe DE. Man mache AF = CD, und setze auf AF ein Dreyeck AFG: so daß die Seite durch A = CE und die Seite durch F = DE wird: so wird der Winkel A = C (67 §).

Da es gleichviel ist, wo man die Puncte D und E in den Schenkeln des Winkels C nehmen will: so kan man mit einem beliebigen Halbmesser aus C einen Bogen schlagen, der diese Schenkel in D und E schneidet. Mit eben dem Halbmesser schlage man aus A einen Bogen, der AB in F schneidet. Schlägt man nun mit dem Halbmesser DE aus F einen Bogen, der den vorigen in G schneidet: so kan man durch A und G, die Linie AG ziehen, welche sodann mit AB den verlangten Winkel ausmacht.

72 §.

26 F. Die Summe zweener Winkel $ABC + ACB$ eines Dreyecks ABC ist allemahl kleiner, als zweene rechte Winkel.

Beweis. Man verlängere die Seite BC, die zwischen diesen Winkeln liegt nach D: so ist $ABC < ACD$ (60 §), und $ABC + ACB < ACD + ACB$. Aber $ACD + ACB = 2R$ (22 §), also $ABC + ACB < 2R$.

Wenn demnach ein Winkel eines Dreyecks ein rechter oder stumpfer Winkel ist: so ist jeder von den übrigen beyden ein spitzer Winkel.

Alle drey Winkel eines gleichseitigen Dreyecks sind spitze Winkel, und die beyden Winkel an der Grundlinie eines gleichschenklichten Dreyecks sind ebenfalls spitze Winkel.

27 F. Wenn eine grade Linie CG auf einer andern AB senkrecht stehet: so kan von keinem Punct C der Linie CG auf AB eine andre von CG unterschiedene senkrechte Linie CH gezogen werden, weil sonst im Dreyeck CGH zweene Winkel G und H rechte Winkel wären.

73 §.

Eine grade Linie *AB* kan eine Kreislinie, nicht in mehr, denn zweenen Puncte schneiden, auch wenn sie nicht durch den Mittelpunct gehet. 36 F.

Beweis. Die grade Linie AB schneide den Kreis DKE in den beyden Puncten D und E: ist nun F ein dritter Durchschnittspunct, und $DG = \frac{1}{2}DE$, $DH = \frac{1}{2}DF$: so müssen die Puncte G und H nothwendig unterschieden seyn. Weil nun vermöge der Voraussetzung nicht nur DE; sondern auch DF eine Sehne des Kreises seyn soll: so müste sowohl CG als auch CH auf AB senkrecht seyn (57 §), welches dem 72 § entgegen ist.

Von einem Punct C, der ausser einer graden Linie AB liegt, kan man nach AB nicht mehr, als zwo gleich große grade Linien CD, CE ziehen. Denn wäre auch $CF = CE$: so schnitte ein Kreis aus dem Mittelpuncte C mit dem Halbmesser CE beschrieben, die grade Linie AB in mehr, denn zweenen Puncten.

74 §.

Durch einen Punct C, der ausser einer graden Linie *AB* liegt, nach *AB* eine senkrechte Linie zu ziehen.

Aufl. Auf der andern Seite von AB, wo C nicht liegt, nehme man einen beliebigen Punct F, und ziehe die Linie CF, welche AB in H schneiden wird (14 §). Aus dem Mittelpuncte C beschreibe man mit dem Halbmesser CF einen Kreis. Dieser schneidet AB, weil $CH < CF$ ist (39 §), und zwar nur in zweenen Puncten (73 §). Sind nun D und E diese Puncte: so ziehe man CD, CE, und halbire den 37 F.

Winkel DCE (69 §). Die Linie CG, welche diesen Winkel halbirt, steht auf AB senkrecht (58 §).

Wenn eine Linie CH auf AB schief stehet, und also mit ihr auf der einen Seite einen spitzen Winkel CHB, auf der andern einen stumpfen Winkel CHD macht, und man zieht von einem Punct C der Linie CH auf AB eine senkrechte Linie; so muß sie auf der Seite des spitzigen Winkels CHB fallen. Denn fiele sie auf der Seite des stumpfen Winkels in Cg: so hätte das Dreyeck CHg bey G einen rechten und bey H einen stumpfen Winkel, welches nicht seyn kan (72 §).

75 §.

Rechtwinklichte Dreyecke (rectangula, orthogonia) heissen diejenigen, welche einen rechten Winkel haben: alle übrige werden schiefwinklichte Dreyecke (obliquangula) genannt. Ist ein Winkel stumpf: so heist es ein stumpfwinklichtes (obtusangulum, amblygonium), und wenn alle drey Winkel spitze sind, ein spitzwinklichtes Dreyeck (acutangulum, oxygonium). Im rechtwinklichten Dreyeck, wird die Seite, welche dem rechten Winkel entgegen stehet, die Hypothenuse genannt, die übrigen Seiten aber, welche den rechten Winkel einschliessen, heissen die Catheti oder Perpendiculär-Seiten, wovon man gemeiniglich eine als die Grundlinie des Dreyecks ansieht.

Im rechtwinklichten Dreyecke ist also die Hypothenuse, und im stumpfwinklichten Dreyecke diejenige Seite die gröste, welche dem stumpfen Winkel gegenüber stehet (62 §).

76 §.

38 F. Unter allen graden Linien, die man von ei-

nem

nem Punct *C*, der ausser der graden Linie *AB* liegt, nach einen Punkt in dieser Linie ziehen kan, ist die senkrechte Linie *CD* die kleinste.

Und wenn *E* und *F* ein paar Puncte sind, die in *AB* auf eben der Seite der Normallinie *CD* liegen: so ist allemahl die grade Linie *CF* > *CE*, wenn *DF* > *DE* ist.

Beweis. Eine jede solcher Linien, wie CE, CF ist im rechtwinklichten Dreyecke CDE oder CDF die Hypothenuse, und CD eine Perpendicular-Seite. Deswegen ist allemahl CE > CD, oder CF > CD (75 §). Wenn aber F und E auf einer Seite des Perpendiculs CD liegen, und es ist DF > DE: so ist allemahl der Winkel CEF > CDE (60 §). Also CEF ein stumpfer Winkel, und CF > CE (75 §).

Man kan also von C nach AB auf einer Seite der Normallinie CD nicht zwo unterschiedene gleich grosse Linien ziehen.

Ein Kreis mit dem Halbmesser CE beschrieben schneidet AB, weil CD < CE ist, und zwar einmahl in E, aber der andre Durchschnittspunct G fällt nothwendig auf der andern Seite der Normallinie CD, weil CG = CE nicht mit CE auf einer Seite liegen kan.

77 §.

Wenn *CDE* ein gleichschenklichtes Dreyeck, 36 F. und *CD* = *CE* ist: so ist jede grade Linie *CH* von der Spitze *C* nach der Grundlinie *DE* innerhalb des Dreyecks kleiner, als die Schenkel. Jede Linie *CF* aber nach der verlängerten Grundlinie ausserhalb des Dreyecks, ist grösser, als die Schenkel *CD*, *CE*, sind.

Beweis.

Beweis. Die senkrechte Linie CG auf DE fället nothwendig innerhalb des Dreyecks (61. 72 §), und alsdenn ist CG < CD (76 §). Da also allemahl CHE > R, wenn CH auf DE schief stehet: so ist CH < CE. Eben so ist allemahl CEB > R (60 §). Also CF > CE.

Wenn also ein Kreis die grade Linie AB in D und E schneidet: so fällt das Stück DE ganz innerhalb des Kreises. Dies gilt demnach von jeder Sehne der Kreislinie.

78 §.

39 F. Wenn zwey Dreyecke *ABC*, *DEF* einen gleichen Winkel haben: so, daß $B = E$, und zwo gleiche Seiten, die den gleichen Winkel nicht einschliessen, nemlich $AB = DE$, $AC = DF$; und es ist überdem die dem gleichen Winkel gegenüberstehende Seite *AC*, *DF* größer, als die anliegende Seite *AB*, *DE*: so sind die ganzen Dreyecke *ABC*, *DEF* gleich groß, und die übrigen Seiten, nebst den Winkeln, die den gleichen Seiten gegenüberstehen.

Beweis. Unter den angenommenen Bedingungen ist auch $EF = BC$. Denn es sey nicht EF; sondern EG, oder $Eg = BC$: so ist DG, oder $Dg = AC$ (54 §). Also im ersten Falle DGF ein gleichschenklichtes Dreyeck und DE > DG (77 §), oder AB > AC wider die Voraussetzung. Wäre $Eg = BC$: so wäre Dfg ein gleichschenklichtes Dreyeck und DE > DF, oder widerum AB > AC. Demnach muß BC = EF seyn. Also ist auch $A = EDF$, $C = DEE$, und das Dreyeck $ABC = DEF$ (64 §).

79 §.

79. §.

Es ist ein Winkel *B* gegeben nebst zwoen graden Linien *E* und *F*, man soll ein Dreyeck verzeichnen, worin zwo Seiten, die den Winkel *B* nicht einschliessen, so groß als die gegebenen Linien *E*, *F* sind.

Aufl. Man nehme auf dem einen Schenkel des 40. Winkels B das Stück BA = der einen gegebenen Li- 41 F.
nie F, und aus dem Mittelpunct A beschreibe man mit einem Halbmesser, welcher der andern gegebenen Linie F gleich ist, einen Kreis, dieser wird den andern Schenkel BC des Winkels B schneiden, dafern AC größer ist, als die Normallinie, die von A auf BC fällt. 3 F.

Wenn nun F > E ist, wie in der 40 Fig. so fal- 40 F.
len die Durchschnittspuncte C und D der graden Linie BC und des Kreises auf entgegengesetzten Seiten von AB. Sie können nicht auf einer Seite fallen, wie in der 41 F., weil sonst AD < AB (77 §) d. i. F < E: seyn würde. Wenn also F > E: so muß man von A nach dem Durchschnittspunct C, welcher auf der Seite des gegebenen Winkels fällt AC ziehen, und ABC wird das verlangte Dreyeck seyn.

Wenn F < E ist, wie in der 41 F. so fallen beyde 41 F.
Durchschnittspuncte D und C auf einer Seite von AB. Sie können nicht auf verschiedenen Seiten fallen, wie in der 40 F., weil sonst AB < AD (77 §), oder E < F wäre, gegen die Voraussetzung. Zieht man demnach AD oder AC: so hat sowohl das Dreyeck ABD, als auch ABC die verlangten Eigenschaften.

Also kan man auf die Gleichheit zweyer Dreyecke, die einen gleichen Winkel, und zwo gleiche Seiten haben, die den gleichen Winkel nicht einschliessen,

und auf die Gleichheit ihrer übrigen Seiten und Winkel, nur allein in dem Falle schliessen, wenn die dem gleichen Winkel gegenüberstehende Seite größer, als die anliegende ist (78 §).

Je kleiner F ist, desto näher kommen die Durchschnittspuncte D und C einander, denn desto näher müssen AD und AC der Normallinie AG rücken. Wäre F der Normallinie gleich: so würde der Kreis die Linie BC nicht mehr schneiden; sondern nur durch einen Punct G derselben durchgehen.

Wäre F kleiner, als die Normallinie von A auf BC: so könnte der Kreis die Linie BC gar nicht mehr treffen (76 §), und aus den gegebenen Stücken liesse sich kein Dreyeck verzeichnen.

80 §.

Zwo grade Linien AB, CD, die auf einer Ebene eine solche Lage gegeneinander haben, daß sie nicht zusammenstossen können, sie mögen auf beyden Seiten so weit man will verlängert werden, heissen Parallele Linien.

Man pflegte wohl dies Zeichen ∥ statt des Worts: Parallel der Kürze wegen zu gebrauchen.

Wenn zwo grade Linien *AB*, *CD* eine dritte *EF* in *G* und *H* so schneiden, daß die beyden inwendigen Winkel *EHD*, *BGF*, welche zwischen *AB* und *CD* an *EF* anliegen, zwey rechte Winkel ausmachen: so sind *AB*, und *CD* parallel.

Beweis. Denn stiessen sie nach B und D verlängert zusammen: so würde sich ein Dreyeck ergeben, worin die beyden Winkel an der Seitenlinie GH zweene rechte Winkel ausmachten, welches dem 72 §

zu-

zuwider ist. Weil nun AGF + BGF = 2 R = EHD + EHC (22 §): so ist AGF + BGF + EHD + EHC = 4 R, folglich auch AGF + EHC = 2 R (28 § Rech.) Demnach können AB und CD aus eben der Ursache, auch nach A und C verlängert nicht zusammen stossen. Zwo grade Linien also, die auf einer dritten senkrecht stehen, sind parallel.

81 §.

Durch einen gegebenen Punct *G* mit einer gegebenen graden Linie *CD* eine Parallellinie zu ziehen. 42 F.

Aufl. Man nehme in CD einen Punct H und ziehe durch G und H die grade Linie EF. Durch G ziehe man AB, unter dem Winkel EGB, oder AGF = EHD: so ist AB mit CD parallel.

Beweis. Weil EGB + BGF, oder AGF + BGF = 2 R: so ist auch EHD + BGF = 2 R, wenn EGB oder AGF = EHD gemacht ist; und deswegen ist AB ∥ CD (80 §).

Die Winkel AGF, und EHD, pflegte man die Wechselswinkel zu nennen, so wie EGB der äussere, und EHD der innere heist.

82 §.

Wenn die Summe beyder Winkel EHD + bGF < 2 R ist: so ist es wenigstens nicht unmöglich, daß ab die Linie CD, wenn beyde nach b und D verlängert werden, einmahl erreiche und schneide. Denn es könnte wohl ein Dreyeck geben, daß auf GH einer Grundlinie stünde, und dessen übrige beyden Seiten mit Gb und HD einerley wären. 42 F.

Aber

Aber auch allemahl wenn die Summe beyder inwendiger Winkel $EHD + CGF = 2$ Rechten so werden beyde Linien AD und CD verlängert, auf der Seite, wo diese beyden Winkel liegen, zusammen stossen.

Man nehme auf CD einen Punct A, auf der Seite von EF, und ziehe $\alpha\beta$ durch AG und γ ferner nun Gb zwischen GE und GA fällt: so schneidet Gb gewiß die Linie HD (33 §). Fällt aber $G\beta$ zwischen GE und Gb: so stelle man sich $\alpha\beta$ sowohl als CD nach beyden Seiten über alle Grenzen verlängert vor. Man nehme ferner an, es werde $\alpha\beta$ um G auf solche Art herum gedrehet, daß der Winkel $FG\beta$ wächst, und folglich $BG\beta$ abnimt: so wird $\alpha\beta$ fortfahren CD zu schneiden, und es wird der Durchschnittspunct γ in $G\beta$ von G, und in HD von H fortrücken. Weil nun noch allemahl ein Stück der Linie $G\beta$ unter HD liegt, so lange es noch einen Durchschnittspunct γ giebt, so kan der Winkel $HG\beta$ noch immer größer werden, ohne daß $\alpha\beta$ aufhört die Linie CD zu schneiden, und alsdann allererst kan es gar keinen Durchschnittspunct weiter geben, wenn $\alpha\beta$ in AB fällt (80 §). Demnach wird der Winkel $HG\beta$ ohne daß $G\beta$ aufhört HD zu schneiden, endlich größer als HGb werden, und dann schneidet auch Gb verlängert die Linie HD.

Was zur Bestätigung dieses Satzes hier gesagt ist, giebt keinen völlig strengen Beweis desselben ab: man ist genöthiget diesen Satz mit dem Euclides als einen Grundsatz anzunehmen. Die Schwierigkeiten, worin man geräth, wenn man einen strengen Beweis des Satzes zu geben bemühet ist, lernet man vollständig kennen aus der im Jahr 1763 un-

ter

ter dem Vorsitz des Herrn Hofrath Kästner vom Hrn. Georg Simon Klügel zu Göttingen vertheidigten akademischen Streitschrift: Conatuum præcipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio.

83 §.

Wenn zwo grade Linien *AB*, *CD* parallel sind, und eine dritte *EF* schneider beyde in *G* und *H*: so ist die Summe der beyden inwendigen Winkel $EHD + BGF = 2R$. 42 F.

Beweis. Wäre EHD + BGF < 2R: so stiesse AB mit CD nach B und D verlängert, zusammen (82 §) wider die Voraussetzung. Wäre EHD + BGF > 2R: so ist AGF + BGF + EHD + EHC = 4R (22 §), also wäre AGF + EHC < 2R, und AB stiesse mit CD nach A und C verlängert zusammen, welches ebenfalls mit der Voraussetzung streitet, weil AB mit CD parallel seyn soll. Also ist unter dieser Bedingung EHD + BGF = 2R.

84 §.

Wenn $EHD + BGF$ in der vorigen Zeichnung $= 2R$ ist: so ist auch $EHD = AGF$, oder die Wechselswinkel sind gleich, und überdem ist der äussere Winkel *EGB* gleich dem innern *EHD*. 42 F.

Beweis. Es ist BGF + AGF = 2R (22 §), wenn also EHD + BGF = 2R: so ist EHD + BGF = BGF + AGF, folglich EHD = AGF. Ferner ist AGF = EGB (27 §), also auch EGB = EHD.

Werden demnach zwo parallele Linien AB, CD von einer dritten in G und H geschnitten: so sind auch die Wechselswinkel EHD und AGF gleich,

und der äussere EGB, ist dem innern EHD gleich (83 §).

85 §.

42 F. Durch einen Punct *G* der ausser der graden Linie *CD* liegt, kan man nicht zwo verschiedene Linien *AB*, und *ab* ziehen, die beyde zugleich mit *CD* parallel sind.

Beweis. Wäre AB ∥ CD, und zugleich *ab* ∥ CD: so könnte man durch G und einen Punct H in CD die grade Linie EF ziehen, und es wäre EHD + BGF = 2R = EHD + *b*GF (83 §). Also BGF = *b*GF, welches nicht seyn kan.

Eine grade Linie *ab* also, die eine von zwoen Parallelen AB schneidet, wird wenn man sie verlängert, auch die andre CD schneiden. Und wenn eine grade Linie EG auf einer von zwoen Parallelen AB senkrecht stehet: so wird sie verlängert, auch die andre CD senkrecht schneiden.

Wenn also die Schenkel GE, DK, und GB, DL, zweener Winkel EGB und KDL parallel sind, die in Absicht der Spitzen G und D nach einer Seite zu liegen, so sind die Winkel gleich groß. Denn EG und LD verlängert, schneiden einander in H und dann ist EGB = EHD = KDL (84 §).

86 §.

43 F. Zwo grade Linien *AB*, *CD* die mit einer dritten *EF* parallel sind, müssen auch unter sich parallel seyn.

Beweis. Durch einen Punct I in AB, und einen andern K in CD, ziehe man GH, diese Linie wird auch EF in L schneiden (85 §), so daß GIB = GLF und GKD = GLF (84 §). Also GIB = GKD, und AB ∥ CD (81 §).

87 §.

87 §.

Wenn eine Seite *BC* des Dreyecks *ABC* nach *D* verlängert wird: so ist der äussere Winkel *ACD* der Summe beyder im Dreyeck ihm gegenüberstehenden Winkel *A* + *ABC* gleich; und die Summe aller dreyer Winkel eines Dreyecks ist zweenen rechten Winkeln gleich. 26 F.

Beweis. Man mache den Winkel DCF = ABC (71 §): so ist CF ∥ AB, und ACF = A (84 §). Aber ACD = ACF + DCF, also auch ACD = A + ABC. Ferner ist ACB + ACD = 2R (22 §), also auch ACB + A + ABC = 2R.

Jeder Winkel im gleichseitigen Dreyeck ist = $\frac{2}{3}$R, und wenn im gleichschenklichten Dreyeck ein Winkel = $\frac{2}{3}$R ist: so ist das Dreyeck gleichseitig.

Die Summe der beyden spitzen Winkel im rechtwinklichten Dreyeck, macht allemahl einen rechten Winkel aus. Jeder spitze Winkel im rechtwinklichten Dreyeck ist also des andern Ergänzung zum rechten Winkel, so, wie in jedem Dreyeck die Summe zweener Winkel, die Ergänzung des dritten zu zweenen rechten Winkeln ist (26 §).

Die drey Winkel eines Dreyecks zusammen betragen so viel, als die drey Winkel eines jeden andern zusammen genommen, und wenn zwey Dreyecke einen gleichen Winkel haben: so ist die Summe der beyden übrigen in dem einen so groß, als in dem andern. Sind zwey Winkel des einen so groß, als zwey Winkel des andern: so ist der dritte Winkel in beyden gleichfalls von einerley Größe.

88 §.

Durch einen Endpunct *A* einer gegebenen 44 F.

graden Linie *AB* eine andre auf *AB* senkrecht zu ziehen.

Aufl. Man nehme AD von willkührlicher Größe, und setze auf AD, als einer Grundlinie das gleichschenklichte Dreyeck ACD. Aus dem Mittelpunct C mit dem Halbmesser CA verzeichne man einen Kreis, der durch D gehen wird. Man ziehe den Durchmesser DE: so ist eine grade Linie durch A und E auf AB senkrecht.

Beweis. Es ist ACD = AEC + CAE (87 §) = 2 CAE (55 §) und aus eben der Ursache ACE = 2CAD. Also 2(CAE+CAD) = ACD+ACE = 2R. Folglich CAE+CAD = EAD = R.

89 §.

Die Summe aller Winkel einer gradlinichten Figur beträgt zweymahl so viele rechte Winkel, als die Figur Seiten hat, weniger 4 rechte Winkel.

45 F. Beweis. Wenn F ein Punct in der Fläche der Figur ABCDE ist, und man zieht von F nach allen Winkelpuncten A, B, u. s. w. grade Linien: so erhält man so viele Dreyecke ABF, BCF, u. s. f. als die Figur Seiten hat, und alle Winkel dieser Dreyecke, diejenigen ausgenommen, die um F herum liegen machen die Summe aller Winkel der Figur aus. Wenn man demnach für jedes Dreyeck 2 rechte Winkel rechnet, und die um F liegende, allemahl 4 rechte ausmachende Winkel (24 §) abziehet: so erhält man die Summe aller Winkel der Figur. Ist demnach *n* die Anzahl der Seiten: so ist diese Summe = 2*n*. R − 4R = (2*n* − 4)R.

46 F. Wenn die Figur einwärts gehende Winkel (angles

gles

gles rentrants) hat, wie in der 46 F. ABC ist: so muß man nicht den Winkel, welcher auswärts der Figur liegt, und kleiner als zwey rechte Winkel ist rechnen; sondern denjenigen, welcher nach innen gekehrt ist, und hier mehr als zwey rechte Winkel ausmacht, denn der Beweis gilt von den Winkeln, deren Oefnung einwärts liegt.

Hat die Figur mehr als einen einwärtsgehenden Winkel, wie in der 47 F.: so geht es zuweilen nicht an, in derselben einen Punct so zu nehmen, daß die von diesem Punct nach den Winkelpuncten gezogenen graden Linien keine Seite der Figur schneiden. Um den Beweis auch auf diesen Fall anzuwenden, darf man nur, wenn AFE ein einwärtsgehender Winkel ist, AE ziehen, und das Dreyeck AGE zeichnen, so daß AG = AF, und EF = EG. 47 F.

So kan man es mit allen einwärtsgehenden Winkeln machen, bis man eine Figur, wie ABCDEG bekomt, worauf sich der Beweis anwenden läst. Nun sind vermöge des Beweises in dem Viereck AFEG, die Winkel $GAF + \alpha + FEG + G = 4R$ oder $GAF + FEG + G = 4R - \alpha$. Da nun der einwärtsgehende Winkel AFE innerhalb der Figur ABCDEF ebenfalls $= 4R - \alpha$ ist (26 §): so erhellet, daß die Summe der Winkel in der Figur nicht geändert werde, wenn man davon $GAF + FEG + G$ abziehet, und statt dessen den einwärtsgehenden Winkel $AFE = GAF + FEG + G$ dazu rechnet, d. i. wenn man das Dreyeck AGE in die Lage AFE legt, und aus der Figur ABCDEG die Figur ABCDEF macht.

Die Summe aller Winkel solcher Figuren also, die gleichviel Seiten haben, ist in der einen so groß, als in der andern.

90 §.

48 F. Wenn zwey Dreyecke *ABC*, *DEF* gleiche Winkel haben $B=E$, $A=EDF$, also auch $C=DFE$ (87 §) und überdem eine gleiche Seite, die zwischen gleichen Winkeln liegt $BC=EF$: so passen die Dreyecke auf einander, und die Seiten sind gleich groß, die den gleichen Winkeln gegenüberstehen.

Beweis. Unter den festgesetzten Bedingungen muß AB = DE seyn. Denn widrigenfalls sey EG, oder Eg = AB. Im ersten Falle ist A = EGF (54 §). Aber EGF ▷ EDF (60 §), also A ▷ EDF wider die Voraussetzung. Im zweyten Fall ist EgF = A (54 §), und EgF ◁ EDF (60 §), also A ◁ EDF, ebenfalls wieder die Voraussetzung. Also ist AB = DE. Folglich passen die Dreyecke auf einander, und es ist auch AC = DF (54 §).

91 §.

49 F. Wenn zwey Dreyecke *ABC*, *DEF* bey *B* und *E* rechtwinklicht sind, und einen gleichen Catheten haben $BC=EF$, die spitzen Winkel *ACB* und *F* aber, die an den gleichen Catheten anliegen, sind ungleich: so sind die entgegengesetzten Seiten *AB* und *DE* auch ungleich, und zwar steht der größere dem größern Winkel entgegen.

Beweis. Es sey ACB ▷ F, und man mache GCB = F: so muß CG zwischen CA und CB fallen, weil GCB ◁ ACB ist, und CG muß AB zwischen A und B schneiden, so daß AB ▷ GB wird. Es ist aber GB = DE (90 §), also auch AB ▷ DE.

92 §.

92 §.

Es ist eine grade Linie BC nebst zweenen 50.
Winkeln α und β gegeben, die beyde zusam- 51 F.
men kleiner, als zweene rechte sind; man soll
ein Dreyeck verzeichnen, worin eine Seite =
BC, ein Winkel $= \alpha$, und ein andrer $= \beta$ ist.

Aufl. Dies läst sich auf zweyerley Art bewerk-
stelligen. Denn man kan das Dreyeck so verzeichnen, 1 F.
daß beyde Winkel α und β an der Seite BC anlie-
gen, man kan es auch so verzeichnen, daß einer von
diesen beyden Winkeln der Seite BC gegenüber-
stehet.

Setzt man an BC bey B den Winkel $ABC = \alpha$, 50 F.
und bey C den Winkel $ACB = \beta$: so schneiden AB
und AC einander, oberhalb BC (82 §), und es er-
giebt sich ein Dreyeck ABC, welches die verlangten
Eigenschaften hat.

Soll β der Seite BC gegenüber stehen: so ver- 51 F.
fahre man so. Nachdem $ABC = \alpha$ gemacht worden,
mache man $ABD = \beta$ und verlängere BC durch B
nach E: so erhält man den Winkel $EBD = \gamma$, wel-
cher mit $\alpha + \beta$ zweene rechte Winkel ausmacht (22
§). Man mache nun $BCA = \gamma$: so werden BA und
CA zusammen stossen, weil $\alpha + \gamma < 2R$, und man
wird ein Dreyeck ABC erhalten, worin $A = 2R -$
$(\alpha + \gamma)$ (87 §) $= \beta$ ist.

93 §.

Weil die Entfernung eines Orts vom andern über-
haupt der kürzeste Weg ist, der von einem Ort zum
andern führt (35 §), so wird die Entfernung eines
Puncts C von einer graden Linie AB, die Normal- 38 F.

52 F. linie CD seyn, die sich von C auf AB ziehen läst (76 §). Wie weit eine Linie AB in irgend einem ihrer Puncte C von einer andern CD entfernt sey, wird also ebenfalls die Größe der von E nach CD gezogenen Normallinie EF bestimmen.

94 §.

52 F. **Parallele Linien *AB, CD* sind durchgängig gleichweit von einander entfernt.**

Beweis. Es sey EF die Entfernung des Puncts E der Linie AB von CD: so ist die Entfernung GH eines jeden andern Puncts G von CD, ebenfalls = EF. Denn man ziehe EH: so ist der Winkel GEH = EHF (84 §), und weil auch EF ⌗ GH (80 §): so ist der Winkel EHG = FEH (84 §). Ueberdem ist EH = EH, also in den Dreyecken EFH und EHG die Seite GH = EF (90 §).

95 §.

Wenn zwo Entfernungen *EF, GH* einer graden Linie *AB* von einer andern *CD* gleich groß sind: so sind die Linien *AB, CD* parallel, und alle ihre Entfernungen von einander gleich groß.

Beweis. Ziehet man EH, so ist EHG = FEH, weil EF ⌗ GH ist. Ueberdem wird vorausgesetzt, es sey EF = GH, und es ist EH = EH. Demnach ist in den Dreyecken EFH und EGH (54 §) der Winkel EGH = EFH = R = GHF, und AB ⌗ CD (80 §). Also sind alle übrige Entfernungen eben so groß (94 §).

Alle Puncte also, E, G, L u. s. f. die von einer graden Linie CD gleichweit entfernt sind, liegen in grader

Linie

Linie. Denn es sey EF = GH = LK, und diese Linien auf CD senkrecht; so wird die grade Linie durch E und G mit CD parallel seyn. Gienge nun die grade Linie EG nicht auch durch L, so müste sie doch die Normallinie LK schneiden (85 §). Nun mag der Durchschnittspunct I unterhalb L, oder oberhalb L liegen: so wird im ersten Fall IK < LK und im andern Fall IK > LK, also entweder IK < GH, oder IK > GH seyn, welches beydes gegen den erwiesenen Satz ist.

Der IV. Abschnitt.

Von den Parallelogrammen und ihrer Vergleichung, sowohl untereinander, als auch mit den Dreyecken.

96 §.

Ein Viereck ABCD, worin jede zwo entgegengesetzte Seiten AB, und CD, imgleichen AD und BC parallel sind, heist ein **Parallelogramm**. Eine grade Linie wie BD zwischen entgegengesetzten Winkelpuncten eines Vierecks, heist eine **Diagonale** desselben. 53 F.

Wenn *AD* und *BC*, ein paar gleich große Parallellinien sind, und man ziehet *AB* und *CD*: so wird das Viereck *ABCD* ein Parallelogramm.

Beweis. Man ziehe die Diagonale BD: so ist in den Dreyecken ABD, und BCD der Winkel ADB =

DBC (84 §) die Seite AD = BC, und BD = BD, also der Winkel ABD = BDC (54 §). Folglich AB mit CD parallel (81 §).

97 §.

In jedem Parallelogramm *ABCD* ist die Summe zweener, an einer Seite *AB* anliegender Winkel $A + ADC = 2R$ (83 §).

Deswegen sind jede zweene einander gegenüberstehende Winkel A und C gleich groß. Denn weil A + ADC = 2R = C + ADC: so ist A = C (28 §. Rech.)

Wenn also ein Winkel eines Parallelogramms ein rechter Winkel ist: so sind die übrigen alle auch rechte Winkel, und wenn ein Winkel schief ist: so sind die übrigen alle auch schief. Im ersten Fall heißt es ein rechtwinklichtes, und im zweyten Falle ein schiefwinklichtes Parallelogramm.

98 §.

In jedem Parallelogramm sind die entgegengesetzten Seiten gleich; und umgekehrt: Ein Viereck, worin jede zwo entgegengesetzte Seiten gleich sind, ist ein Parallelogramm.

Beweis. Wenn ABCD ein Parallelogramm ist, und man ziehet die Diagonale BD: so ist in den Dreyecken ABD, und CBD der Winkel ADB = DBC, und ABD = BDC (84 §). Da nun auch BD = BD: so ist AB = CD, und AD = BC (90 §). Wenn aber in dem Viereck ABCD die Seite AB = CD und AD = BC ist: so ist überdem BD = BD. Folglich in den Dreyecken ABD, und BDC der Winkel ADB = DBC, weswegen AD ∥ BC ist, überdem ABD = BDC (64 §), weswegen auch AB ∥ CD ist (81 §).

Wenn

Wenn demnach in einem Parallelogramm ABCD zwo Seiten AB, AD, die einen Winkel A einschliessen, gleich groß sind: so sind alle Seiten gleich groß.

99 §.

Ein rechtwinklichtes Parallelogramm heist auch ein Rectangel oder Rechteck, und ein gleichseitiges Rechteck wird ein Quadrat genannt. Wenn im schiefwinklichten Parallelogramm alle Seiten gleich groß sind: so heist es ein Rhombus, und wenn die Seiten ungleich groß sind, ein Rhomboides. Die übrigen vierseitigen Figuren führen folgende Namen. Wenn nur zwo entgegengesetzte Seiten AD, BC parallel sind, die übrigen AB, CD aber nicht: so heist die Figur ein Trapezium, und wenn keine Seite der entgegenstehenden parallel ist, ein Trapezoides. 54 F.

100 §.

Im Trapezio ABCD müssen die beyden parallelen Seiten AD, BC ungleich groß seyn, weil das Viereck sonst ein Parallelogramm wäre (96 §). Und umgekehrt, wenn in einem Vierecke zwo einander gegenüberstehende Seiten AD, BC parallel, und ungleich groß sind: so ist es ein Trapezium. Denn wäre es ein Parallelogramm: so wäre AB = CD (98 §). 54 F.

Wenn die beyden parallelen Seiten AD, BC auf einer der übrigen AB senkrecht stehen: so ist einer von den übrigen beyden Winkeln ADC, und BCD spitz, der andre stumpf. Denn A + B + ADC + BCD = 4R (89 §). Wenn also A = R, und B = R: so ist ADC + BCD = 2R. Wären nun beyde gleich: so

wäre

wäre jeder = R, und die Figur ein Parallelogramm (80 §). Also ist einer spitz, der andre stumpf.

Ist nun ADC spitz: so ist die gegenüberstehende Seite CB < AD. Denn eine senkrechte Linie DE von D auf BC fällt auf der Seite DCE (74 §). Dann ist ABED ein Parallelogramm, worin EB = AD, also BC < AD.

Umgekehrt: wenn AD > BC ist, so ist der Winkel ADC spitz. Denn es sey BE = AD, so ist BED = R (96. 97 §), also DCE = ADC ein spitzer Winkel.

101 §.

Wenn zwo Entfernungen DA, CB einer graden Linie DC von der andern AB ungleich sind: so stößt DC nach der Seite, wo die kleinste Entfernung ist, mit AB zusammen (100. 82 §). Die Entfernungen auf dieser Seite werden immer kleiner, bis AB von DC in F geschnitten wird, und DC durch F verlängert, auf der andern Seite von AB sich erstreckt; da dann umgekehrt, die Entfernungen *cb*, *da* wiederwachsen, wie sie vorher abnahmen.

102 §.

53 F. Es ist ein Winkel *DAB* nebst zwoen Seiten *E* und *F* gegeben, man soll aus diesen Stücken ein Parallelogramm verzeichnen.

Aufl. Man nehme auf dem einen Schenkel des gegebenen Winkels AB = E, und auf dem andern AD = F. Mit dem Halbmesser AD verzeichne man aus B, und mit dem Halbmesser AB aus D Kreise. Diese werden sich schneiden, weil ABD ein Dreyeck ist (44 §). Der eine Durchschnittspunct ist mit A einerley, und der andre fällt über BD (65 §). Es

sey

sey C, und man ziehe BC und CD: so ist ABCD ein Parallelogramm, weil AB = CD, und AD = BC (98 §).

In der Ausübung ist es nicht nöthig die ganzen Kreise zu zeichnen, denn man sucht eigentlich nur den über BD fallenden Durchschnittspunct, und diesen erhält man schon durch ein paar mäßige Bogen derselben.

Soll man nun auf einer gegebenen graden Linie AB ein Quadrat setzen: so bedarf man weiter keiner andern gegebenen Stücke. Man setzt auf AB durch A eine senkrechte Linie (88 §) nimt auf derselben AD = AB, und verfährt wie vorhin: so erhält man das Quadrat ABCD. 55 F.

Wenn zwo Seiten E und F gegeben sind, und man soll daraus ein Rectangel verzeichnen: so bedarf man weiter keines gegebenen Winkels. Auf einer graden Linie AB setzt man, wie vorhin, eine senkrechte Linie AD: so ist DAB der gegebene Winkel: übrigens verfährt man nach den gegebenen Regeln. 56 F.

Soll man auf einer gegebenen Linie AB einen Rhombum setzen: so muß man den Winkel α wissen, den die Seiten des Rhombi einschlieſſen sollen. Man macht den Winkel BAD = α, und AD = AB: übrigens ergiebt sich der Rhombus ABCD wie vorhin. 57 F.

103 §.

Zwey Quadraten ABCD, EFGH, die gleiche Seiten haben, passen auf einander, und sind gleich groß. Wenn aber die Seite AB des Quadrats ABCD kleiner als die Seite EI des Quadrats EIKL ist: so ist ABCD < EIKL. Denn ABCD past auf das Stück EFGH, des Quadrats EIKL. 58 F.

Wenn

Wenn demnach umgekehrt zwo Quadrate gleich groß sind: so sind ihre Seiten gleich groß, und des größern Quadrats Seite ist größer, als die Seite des kleinern Quadrats.

104 §.

Wenn man im Parallelogramm eine Seite für die Grundlinie annimt; so ist die Höhe des Parallelogramms die Entfernung der entgegengesetzten Seite von dieser Grundlinie. Und wenn man im Dreyeck eine Seite für die Grundlinie nimt: so ist die Höhe des Dreyecks die Entfernung der Spitze des entgegengesetzten Winkels von dieser Grundlinie.

55. 56 F. Wenn im rechtwinklichten Parallelogramm ABCD eine Seite, welche man will, z. E. AB die Grundlinie ist: so ist die anliegende Seite AD oder BC, die Höhe. Und wenn im rechtwinklichten Dreyeck ABC 49 F. der eine Cathetus BC die Grundlinie ist: so ist der andre AB die Höhe.

105 §.

59 F. Parallelogrammen *ABCD*, und *ABEF*, die gleiche Grundlinien und Höhen haben, sind gleich groß.

Beweis. Man kan allemahl das eine ABEF so auf das andre ABCD legen, daß beyde Grundlinien zusammenfallen, wie die Figur vorstellet. Sind nun die Höhen gleich: so sind alle Puncte in CD und EF gleichweit von AB entfernt, und deswegen fallen CD und EF in einer graden Linie (95 §). Dafern nun überdem der Winkel DAB = FAB ist: so past ABEF auf ABCD, und beyde Figuren sind gleich groß. Wann aber die Winkel DAB, und FAB nicht gleich groß sind: so muß man drey Fälle unterscheiden.

1) Es kan F zwischen D und C fallen, wie in der 59 Fig. Nun ist DC = AB = FE, also DC − CF = FE − CF, oder DF = CE; ferner AD = BC, AF = BE. Also das Dreyeck ADF = BCE (64 §) und ADF + ABCF = BCE + ABCF, d. i. Pgr. ABCD = ABEF. 59 F.

2) Es kan F in C fallen, und es bleibt das Dreyeck ACD = BEF, also ACD + ABF = BEF + ABF, d. i., das Pgr. ABCD = ABEF. 60 F.

3) Es kan F auf der andern Seite von C fallen, so daß BC von AF in G geschnitten wird. Es bleibt aber noch DC = FE, und also DC + CF = EF + CF, oder DF = CE, AD = BC, AF = BE, also das Dreyeck ADF = BCE. Ferner ADF − CGF = BCE − CGF d. i. ADCG = BGFE, und wiederum ADCG + AGB = BGFE + AGB, oder Pgr. ABCD = ABEF. 61 F.

Statt eines gegebenen schiefwinklichten Parallelogramms kan man also allemahl leicht ein rechtwinklichtes verzeichnen, das jenem gleich ist, wenn man die eine Seite des rechtwinklichten der Grundlinie, und die andre Seite der Höhe des andern gleich macht.

106 §.

Dreyecke *ABC*, *DEF* über gleichen Grundlinien, in gleicher Höhe, sind gleich groß. 62 F.

Beweis. Aus den Winkeln A, D, und den Seiten AB, AC, und DE, DF verzeichne man die Parallelogramme AG und DH, die mit den Dreyecken ABC, DEF gleiche Grundlinien und Höhen haben: so ist Pgr. AG = Pgr. DH (105 §). Also $\frac{1}{2}$ AG = $\frac{1}{2}$ DH, oder das Dreyeck ABC = DEF.

Also ist jedes Parallelogramm doppelt so groß, als ein Dreyeck, so mit demselben gleiche Grundlinie und Höhe hat.

Ist die Grundlinie eines von zweyen gleich hohen Dreyecken größer, als die Grundlinie des zweyten: so ist das erste Dreyeck größer, als das zweyte. Und bey gleichen Grundlinien ist das Dreyeck größer, als das andre, dessen Höhe die größere ist.

Wenn demnach sowohl die Grundlinie, als auch die Höhe eines Dreyecks größer, als die Grundlinie, und Höhe eines andern Dreyecks ist: so ist das erste Dreyeck größer, als das letzte.

107 §.

63 F. Ein rechtwinklichtes Parallelogramm zu verzeichnen, das so groß, als ein gegebenes Dreyeck *ABC* ist.

Aufl. Nachdem man CF mit der Grundlinie AB parallel gezogen hat, theile man AB bey D in zwey gleiche Theile; setze DE auf AB senkrecht, und ziehe BF mit DE parallel: so ist DBFE das verlangte Rechteck.

Beweis. Man ziehe CD: so ist das Rechteck DBFE = 2.DBC (106 §) und zugleich ABC = 2DBC, also DBFE = ABC.

Es könnte auch BDE einem jeden andern gegebenen Winkel gleich genommen werden, wenn das Parallelogramm schiefwinklicht werden sollte.

108 §.

Ein Rechteck zu verzeichnen, das so groß, als ein gegebenes Dreyeck *ABC* ist, und eine Seite von gegebener Größe = *a* hat.

Aufl.

Aufl. Man verzeichne das Rechteck DBFE = ABC, wie im 107 §, verlängere AB nach G, mache BG = *a*, und ziehe GH ∥ BF. Wenn nun GH in H mit EF zusammen stößt, ziehe man HB, welche ED in I schneidet. Durch I ziehe man IK ∥ AB, welche FB in L, und HG in K schneidet: so ist BGKL das verlangte Rechteck.

Beweis. Daß BGKL = DBFE = ABC sey, erhellet so: es ist EHI = KHI, BEH = BGH, also EHI + BFH = KHI + BGH, d. i. EFBI = BGKI. Ferner ist DBI = BIL, also EFBI + DBI = BGKI + BIL, oder DBFE = BGKL.

109 §.

Jede grade Linie, wie AC, die man in einer gradlinichten Figur ABCD, EFGH von der Spitze A eines Winkels bis zur Spitze C eines andern Winkels so ziehet, daß sie ganz in der Fläche dieser Figur fällt, heist eine Diagonale dieser Figur. 65 F.

Man kan jede gradlinichte Figur vermittelst solcher Diagonalen in lauter Dreyecken, wie ABC, ACD, u. s. f. vertheilen, die zusammen genommen, die ganze gegebene Figur ausmachen.

110 §.

Ein Rechteck zu verzeichnen das einer gegebenen gradlinichten Figur *ABCD* gleich ist. 66 F.

Aufl. Man vertheile die Figur durch Diagonalen in Dreyecke ABC, und ACD, und verzeichne ein Rechteck, EFGH = ABC (107). Man kan auch nach dem 108 § dies Rechteck so einrichten, daß eine Seite desselben FG eine gegebene Größe bekomt. Nun verzeichne man statt des zweyten Dreyecks ACD

ebenfalls ein Rechteck *fgki* nach dem 108 § so, daß eine Seite desselben *ki* = *fg* = FG wird. Man verlängere EF nach I, und nehme FI = *fi* und ziehe IK ∥ FG: so wird FGKI = *fgki* (105 §), und das Rechteck EHKI = ABC + ACD = ABCD.

Wenn die Figur ABCD mehr, als vier Seiten hätte: so würde man mehr Diagonalen ziehen können, und mehr Dreyecke erhalten. Aber es fällt in die Augen, daß man mit jedem folgenden Dreyeck eben so umgehen könne, wie mit ACD. Man erhält also für jedes folgende Dreyeck ein neues Rechteck, welches an dem vorigen EHKI anschliest, und mit demselben ein Ganzes ausmacht. Verfährt man demnach mit allen Dreyecken so, worin die gegebene Figur sich vertheilen läst: so erhält man endlich ein Rechteck, welches allen diesen Dreyecken zusammen genommen, und also der ganzen Figur gleich ist.

111 §.

67 F. Wenn auf den dreyen Seiten *AB*, *AC*, *BC* eines bey *A* rechtwinklichten Dreyecks *ABC* Quadrate verzeichnet sind: so ist das Quadrat *CE* auf der Hypothenuse so groß, als die Summe der Quadrate *AD* + *AL* auf den Perpendiculär-Seiten.

Beweis. Weil BAH = R = CAG: so liegt AG mit AB und AH mit AC in grader Linie (23 §). Aus der Spitze des rechten Winkels A, sey AF auf der Hypothenuse BC senkrecht gezogen; und schneide die gegenüberstehende Seite des Quadrats CE in K: so ist EF sowohl als CK ein Rechteck. Man ziehe AE und CD: so ist EF = 2 ABE und AD = 2 DBC (106 §). Aber der Winkel ABD = R = CBE, also ABD

+

+ABC=CBE+ABC, oder DBC=ABE; ferner DB=AB, und BC=BE, also das Dreyeck ABE=DBC (54 §), und 2ABE=2DBC, folglich das Rechteck EF=dem Quadrat AD. Vermöge eben dieses Beweises ist das Rechteck CK=dem Quadrat AL, also EF+CK=CE=AD+AL.

Dieser Lehrsatz heist von dem Erfinder der Pythagorische Lehrsatz, und wird in der Folge oft gebraucht werden. Weil es etwas leichtes ist, sich über jede grade Linie ein Quadrat vorzustellen: so pflegt man die Quadrate nicht allemahl ausdrücklich in den Figuren zu zeichnen, und man bedient sich in der Ausübung folgender Verkürzung. Wenn über einer graden Linie AB ein Quadrat stehen sollte, das nicht ausdrücklich gezeichnet ist: so setzt man an den Buchstaben, die diese Linie bezeichnen, oberwärts rechter Hand den Buchstab *q*, auf diese Art AB*q*: so wäre in der 67 Fig. AB*q*=AD, AC*q*=AL, BC*q*=CE. Vermöge dieser verkürzten Ausdrücke läst sich der Pythagorische Lehrsatz so ausdrücken: In einem bey A rechtwinklichten Dreyeck ABC ist BC*q*=AB*q*+AC*q*.

Es folgt hieraus, daß BC*q*−AC*q*=AB*q* sey, das heist: Im rechtwinklichten Dreyeck ist das Quadrat eines jeden Catheti gleich der Differenz des Quadrats des andern Catheti vom Quadrat der Hypothenuse.

112 §.

Wenn in einem Dreyeck *ABC*, *BC*q=*AB*q+*AC*q ist: so ist der Winkel *BAC*, der *BC* gegenüber stehet, ein rechter Winkel. 68 F.

Beweis. Man setze AD auf AB senkrecht, und mache AD=AC, ziehe BD: so ist BD*q*=AB*q*+AD*q*

(111 §) = $AB^q + AC^q = BC^q$, also BD = BC (103 §). Demnach paßt das Dreyeck ABD auf ABC und es ist der Winkel BAD = BAC = R (64 §).

Wenn also in einem Dreyeck *a b c*, $bc^q < ab^q + ac^q$ ist: so ist der Winkel *a* spitz. Denn im Dreyeck ABC, worin AB = *ab*, AC = *ac*, und $BC^q = AB^q + AC^q = ab^q + ac^q$ gemacht worden, ist A = R. Weil nun $bc^q < BC^q$, folglich *bc* < BC: so ist *a* < A (63 §), also *a* < R. Auf ähnliche Art erhellet, wenn $bc^q > ab^q + ac^q$ ist, daß A stumpf seyn müsse.

113 §.

Es sind die Seiten zweyer Quadrate gegeben: man soll die Seite eines Quadrats finden, welches der Summe, oder der Differenz der vorigen gleich ist.

69 F. Aufl. Man verzeichne einen rechten Winkel A (88 §). Dafern nun D und E die Seiten der gegebenen Quadrate sind, deren Summe gesucht wird: so mache man AB = D, AC = E, und ziehe BC: so ist $BC^q = AB^q + AC^q = D^q + E^q$. Sind F und E die Seiten der gegebenen Quadrate, deren Differenz gesucht wird: so nehme man AC = der kleinern Seite E, und mit dem Halbmesser F schlage man aus C einen Kreis, welcher den andern Schenkel des rechten Winkels A schneidet (79 §). Ist nun B ein Durchschnittspunct: so ist AB die gesuchte Seite. Denn man ziehe BC: so ist $AB^q = BC^q - AC^q = F^q - E^q$ (111 §).

Der V. Abschnitt.

Vom Kreise, und den regulären Polygonen.

114 §.

Wenn zwo Linien *AB*, *AC* einander in *A* schneiden, und man setzt *DE* auf *AB* in *H*, *FG* auf *AC* in *I* senkrecht: so müssen diese Normallinien einander ebenfalls schneiden. 70 F.

Beweis. Dafern der Winkel BAC ein schiefer Winkel ist, so wird er entweder spitz oder stumpf seyn. Ist er spitz: so ist $BAC + AIG < 2R$, und FG schneidet AB, nach B und G zu verlängert (82 §). Ist BAC stumpf: so ist sein Nebenwinkel CAL spitz, und FG schneidet AB nach A und F verlängert. Wenn nun L der Durchschnittspunct ist: so ist der Winkel bey L in beyden Fällen spitz, weil $AIL = R$ (72 §). Da nun bey H ein rechter Winkel ist: so hat man in beyden Fällen $H + L < 2R$, also schneiden auch FG und DE einander. Dafern endlich $BAC = R$ ist, so wird DE mit AC parallel (80 §). Also wird DE von FG vermöge des 85 § geschnitten.

115 §.

Durch drey Puncte *A*, *B*, *C* die nicht in gras 70 F. der Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben.

Aufl. Man ziehe von einem Puncte A nach den übrigen beyden grade Linien AB, AC, und halbire diese mit den senkrechten Linien DE, FG (70 §), wel-

che einander irgendwo in K schneiden werden. Dann aber wird eine Kreislinie aus dem Mittelpunct K mit dem Halbmesser AK beschrieben, auch durch B und C durchgehen.

Beweis. Weil BAC < 2R ist: so schneiden DE und FG einander irgendwo in K (114 §). Man ziehe nun AK, BK, CK: so ist AK = CK (54 §) und aus eben der Ursache AK = BK, folglich geht die Kreislinie aus K mit dem Halbmesser AK beschrieben, durch B und C.

Durch jede drey Puncte, dafern sie nur nicht in grader Linie liegen (73 §), läst sich also eine Kreislinie verzeichnen, und drey solche Puncte bestimmen die Größe und Lage des Kreises.

116 §.

71 F. **Wenn die Winkel am Mittelpunct** *ACB*, *EDF*, **zweener Ausschnitte** *AGBC*, *DEHF* **gleicher Kreise gleich groß sind: so sind ihre Bogen** *AGB*, *EHF*, **und die Ausschnitte selbst auch gleich groß.**

Und wenn der Winkel *KDE* > *ACB* **ist: so ist der Bogen** *EHK* > *AGB*, **und der Ausschnitt** *EHKD* > *AGBC*.

Beweis. Wenn man den Kreis AGBL so auf dem andern EHFK legt, daß C auf D, und CA auf DE fällt: so past ACB auf EDF, A fällt in E, B in F, und der Bogen AGB auf EHF (45 §). Also sind die Ausschnitte und ihre Bogen gleich groß.

Wenn aber KDE > BAC ist: so sey FDE = BCA, und es wird DF den Bogen EK zwischen E und K schneiden, so, daß EK > EF, folglich auch EK > AB ist. Es wird auch EHKD > AGCB.

Zwey Durchmesser also AL und BM, die sich senkrecht schneiden, theilen die Kreislinie in vier gleiche Bogen AB, BL, LM, AM, die man Quadranten der Kreislinie nennt, und die Kreisfläche in vier gleiche Ausschnitte, die Quadranten der Kreisfläche heissen.

Ein Bogen FG aus der Spitze eines Winkels zwischen seinen Schenkeln mit einem willkührlichen Halbmesser beschrieben, ist ein Quadrant, wenn der Winkel BAC ein rechter Winkel ist: Der Bogen HG ist größer, als ein Quadrant, wenn DAC stumpf ist, und KG ist kleiner als ein Quadrant, wenn EAC ein spitzer Winkel ist. 72 F.

Wenn also umgekehrt ein solcher Bogen ein Quadrant ist: so ist der zugehörige Winkel ein rechter, wenn der Bogen größer, als ein Quadrant ist: so ist der Winkel stumpf, und ist der Bogen kleiner, als ein Quadrant: so ist der Winkel spitz.

117 §.

Einen gegebenen Kreis-Bogen *AFB* oder *AEB* in zweene gleiche Theile zu theilen. 73 F.

Aufl. Man ziehe seine Sehne AB, und halbire sie vermittelst der senkrechten Linie EF (70 §) diese theilt den Bogen AFB in F, und AEB in E in zweene gleiche Theile.

Beweis. Die Linie EF halbirt den Winkel ACB (59 §), so daß ACF=BCF, und ACE=BCE, also ist AF=BF, und AE=BE (116 §).

Eine grade Linie vom Mittelpunct auf die Sehne AB senkrecht gezogen halbirt ebenfalls die Bogen AFB, und AEB (61 §).

Dem-

Demnach sind ein paar Kreis-Bogen AG, BH zwischen parallelen Sehnen AB, GH, gleich groß. Denn eine Normallinie CF auf der einen, steht auch auf der andern senkrecht (85 §), und halbirt also sowohl GFH als auch AFB so, daß GF = HF, AF = BF, und folglich GF − AF = HF − BF, oder AG = BH ist.

74 F. Könnte man einen Winkel ACB in so viel gleiche Theile ACD, DCE, u. s. f., als verlangt würde, eintheilen: so würden eben die Linien CD, CE, CF u. s. f., welche den Winkel theilen, auch den Bogen AB zwischen seinen Schenkeln in eben so viele gleiche Theile AD, DE u. s. f., eintheilen.

89 F. Wenn die Halbmesser KA, KB, KC u. s. f. eines Kreises um den Mittelpunct K lauter gleiche Winkel AKB, BKC, CKD u. s. f. einschliessen: so theilen diese Halbmesser den Umfang des Kreises in eben so viele gleiche Bogen, als Winkel um K liegen. Dafern also $BKC = \frac{4R}{n}$ ist: so ist $BC = \frac{1}{n}P$, wenn P die Peripherie des Kreises bedeutet, und n die Anzahl der gleichen Winkel um K.

118 §.

71 F. Wenn die Ausschnitte *AGBC*, *EHFD* oder auch die Bogen *AGB*, *EHF* der Ausschnitte gleicher Kreise gleich groß sind; so sind auch die Winkel *ACB*, *EDF* am Mittelpunct gleich groß. Denn wären diese Winkel nicht gleich groß: so wären die Ausschnitte oder Bogen ebenfalls ungleich (116 §) gegen die Voraussetzung.

Wenn aber $EHK \triangleright AGB$ ist: so muß der Winkel $EDK \triangleright ACB$ seyn. Denn wäre EDK = ACB

$\equiv$ ACB, oder EDK $\lessdot$ ACB: so wäre im ersten Falle EHK $\equiv$ AGB, und im zweyten Falle EHK $\lessdot$ AGB, beydes gegen die Voraussetzung.

Ein Durchmesser EF also, der den Kreisbogen AFB in zweene gleiche Theile AF, BF theilt, halbirt den Winkel am Mittelpunct ACB, der zu diesem Bogen gehört, und deswegen halbirt er auch die Sehne AB in D, und steht auf ihr senkrecht (58 §). 73 F.

Könnte man jeden Bogen, der zwischen den Schenkeln des Winkels ACB aus dem Mittelpunct C beschrieben worden, in eine verlangte Anzahl gleicher Theile AD, DE, EF u. s. f. eintheilen: so würden die Linien DC, EC, FC u. s. f. durch diese Theilungspuncte bis zur Spitze C des Winkels ACB gezogen, diesen Winkel in eben so viele gleiche Theile eintheilen. 74 F.

119 §.

In gleichen Kreisen gehören zu gleichen Sehnen *AB*, *DE*, gleiche Bogen *AGB*, *DHE*, und zu gleichen Bogen, gleiche Sehnen. 75 F.

Zur grössern Sehne *DK* aber gehört ein grösserer Bogen, *DHK*, als zur kleinern Sehne *AB*: und umgekehrt, zum grössern Bogen eine grössere Sehne, dafern die Bogen kleiner sind, als die halbe Peripherie.

Beweis. Man ziehe CA, CB, FD, FE, wenn C und D die Mittelpuncte sind: so hat man AC $=$ DF, BC $=$ EF. Ist nun überdem AB $=$ DE: so ist der Winkel ACB $=$ DFE (64 §). Also der Bogen AGB $=$ DHE (116 §). Und wenn der Bogen AGB $=$ DHE: so ist der Winkel ACB $=$ DFE (118 §), also AB $=$ DE (54 §).

Wenn

Wenn DK ▷ AB ist: so ist DFK ▷ ACB (63 §) und DHK ▷ AGB (116 §); und ist DHK ▷ AGB, so ist DFK ▷ ACB (118 §). Also DK ▷ AB (63 §). Man muß aber bey diesen letzten Vergleichungen Bogen verstehen, die kleiner, als die halbe Peripherie sind, weil sonst die Winkel am Mittelpunct größer, als zweene rechte werden. Dann aber gehört umgekehrt zum kleinern Bogen eine größere Sehne, und zum größern, eine kleinere, weil eines kleinern Winkels Ergänzung zu vier rechten Winkeln größer ist, als die Ergänzung eines größern; und in den Dreyecken ACB, DFK nun nicht die zu den Bogen gehörigen Winkel selbst; sondern ihre Ergänzungen zu vier rechten Winkeln, den Sehnen AB, DK gegenüber liegen.

120 §.

75 F. Man kan in einem Kreise DEK*e* leicht eine Sehne von gegebener Größe = AB ziehen, die in einem gegebenen Punct D anfängt, dafern AB kleiner, als des Kreises DEK*e* Durchmesser ist. Denn ein Kreis aus dem Mittelpuncte D mit dem Halbmesser AB beschrieben schneidet den Kreis DK*e* zweymahl in E und *e*, daher dann eine grade Linie von D nach E oder *e* gezogen, die verlangte Sehne ist.

Vermittelst dieses Verfahrens schneidet man also zugleich auf der Kreislinie DEK*e*, einen Bogen D*he*, oder DHE ab, der so groß ist, als ein gegebener Bogen AGB, von einem gleichen Kreise ABL.

121 §.

76 F. In einem Kreise sind gleiche Sehnen *AB*, *DE* vom Mittelpunct *C* gleichweit entfernt, und umgekehrt, vom Mittelpunct gleichweit entfernte Sehnen sind gleich groß.

Von

Von ungleichen Sehnen *AB*, *DF* liegt die grössere *DF* näher beym Mittelpunct, als die kleinere *AB*, und umgekehrt: Eine Sehne *DF*, die dem Mittelpunct näher liegt, ist grösser, als eine entferntere *AB*.

Beweis. Wenn CG, CH die Entfernungen der Sehnen AB, DE von C sind: so ist $AG = \frac{1}{2}AB$, und $DH = \frac{1}{2}DE$. Man ziehe CA, CD: so hat man die rechtwinklichten Dreyecke ACG, DCH, worin $CG^2 = AC^2 - AG^2$, und $CH^2 = CD^2 - DH^2$ (111 §). Ist also $AB = DE$, folglich $AG = DH$: so ist $EG^2 = CH^2$ und $CG = CH$. Umgekehrt, weil $AG^2 = AC^2 - CG^2$ und $DH^2 = CD^2 - CH^2$: so ist $AG^2 = DH^2$, wenn $CG = CH$, also $AG = DH$, und $AB = DE$.

Wenn aber CK die Entfernung der Sehne DF von C ist: so hat man $DK = \frac{1}{2}DF$. Ferner $CK^2 = CD^2 - DK^2$, und $CG^2 = AC^2 - AG^2$. Wenn also $DF > AB$, folglich $DK > AG$ ist: so wird $CK^2 < CG^2$, und $CK < CG$. Umgekehrt ist $DK^2 = CD^2 - CK^2$ und $AG^2 = AC^2 - CG^2$, wenn also $CK < CG$ ist; so ist $DK^2 > AG^2$, folglich $DK > AG$, und $DF > AB$.

122 §.

Wenn zwo Sehnen *AD*, *BD* einen Winkel *ADB* einschliessen, dessen Spize *D* in der Kreislinie liegt, und zu dem Bogen *AB* zwischen den Schenkeln dieses Winkels gehört am Mittelpunct der Winkel *ACB*: so ist *ACB* doppelt so groß, als *ADB*. 77. 78. 79 F.

Beweis. Man muß folgende drey Fälle unterscheiden.

77 F. 1) Es kan ein Schenkel AD des Winkels ADB an der Peripherie durch den Mittelpunct C gehen, und also auf AC fallen. Nun ist ACB = ADB + CBD (87 §), und ADB = CBD (55 §). Also ACB = 2ADB.

78 F. 2) Es kan der Mittelpunct C innerhalb des Winkels ADB fallen. Ziehet man nun den Durchmesser DE: so ist ACE = 2ADE, und ECB = 2EDB (1 Fall). Also ACE + ECB = ACB = 2 (ADE + EDB) = 2 ADB.

79 F. 3) Es kan C ausserhalb den Winkel ADB fallen. Ziehet man wiederum den Durchmesser DE: so ist BCE = 2BDE, und ACE = 2ADE, also BCE — ACE = ACB = 2 (BDE — ADE) = 2ADB.

123 §.

79 F. Wenn man die Sehne AB ziehet: so heist der Winkel an der Peripherie ADB dessen Schenkel durch die Endpuncte A und B der Sehne gehen, und dessen Spitze D in den Bogen des Abschnitts fällt, dem diese Sehne zugehört, der Winkel in diesem Abschnitt, und man sagt: der Abschnitt fasse diesen Winkel.

Alle Winkel in einerley Abschnitt sind gleich groß, denn sie sind die Hälften von einerley Winkel am Mittelpunct.

80 F. Wenn AB durch C gehet: so ist ACB = 2 R, also ADB = R, demnach ist jeder Winkel im Halbkreise ein rechter Winkel.

Ein Winkel AD*b* in einem kleinern Abschnitt ist stumpf. Denn nun ist AB*b* grösser, als ein Halbkreis, und die Hälfte des erhabenen Winkel AC*b* > R.

Ein

Ein Winkel ADß im größern Abschnitt ist spitz, weil der Bogen Aß nun kleiner, als ein Halbkreis, und $\frac{1}{2}$ ACß < R ist.

124 §.

In einem Vierecke *ABCD* dessen vier Winkelpuncte in einer Kreislinie liegen, sind jede zwey entgegengesetzte Winkel $ABC + ADC = 2R$. 81 F.

Beweis. Man ziehe AC, und BD: so ist ABC + BCA + CAB = 2R. Aber BCA = BDA, und CAB = CDB, also ABC + BDA + CDB = 2R, und weil BDA + CDB = ADC: so hat man ABC + ADC = 2R, also auch BAD + BCD = 2R (89 §).

Um jedes Viereck von dieser Art also, worin zweene entgegengesetzte Winkel zweene rechte ausmachen, läst sich eine Kreislinie so verzeichnen, daß sie durch die Spitzen der vier Winkel gehet. Man verzeichne 82 F. nemlich einen Kreis durch die drey Puncte A, B, C, dafern nun ABC + ADC = 2R: so geht dieser Kreis auch durch D. Denn fiele D in der Kreisfläche, so müste AD verlängert, die Kreislinie in F schneiden, und wenn man nun CF ziehet: so wäre AFC < ADC (60 §) und ABC + AFC < 2R, gegen den erwiesenen Satz. Fiele D ausser der Kreisfläche: so muß ein Stück des Bogens AFC zwischen den Schenkeln des Winkels ADC fallen. Man nehme G in diesem Bogen, und ziehe AG, CG: so ist AGC > ADC (60 §), also ABC + AGC > 2R, welches wiederum falsch ist.

125 §.

Eine grade Linie, die durch den Umfang eines Kreises so durchgehet, daß kein Punct von ihr innerhalb der Kreisfläche fällt, heist eine Berührungslinie

linie oder Tangente des Kreises, so wie jede Linie die den Kreis schneidet, eine Sekante desselben genannt wird.

Eine Tangente kan also nur durch einen Punct der Kreislinie gehen, denn gienge sie durch zwey Puncte: so fiele das Stück zwischen diesen Puncten in der Kreisfläche (77 §) und also wäre die Linie keine Tangente.

126 §.

Durch einen gegebenen Punct, der entweder in der Kreislinie, oder ausserhalb des Kreises liegt, eine Tangente des Kreises zu ziehen.

83 F. Aufl. 1. Ist D in der Kreislinie gegeben: so ziehe man den Halbmesser CD, und setze durch D auf CD die grade Linie AB senkrecht (88 §): so ist AB eine Tangente des Kreises, denn alle übrige von D unterschiedene Puncte der Linie AB sind von C weiter, als D entfernt (76 §). Also liegt AB ganz ausser dem Kreise.

84 F. 2) Ist A ausser dem Kreise gegeben: so ziehe man die grade Linie CA, halbire sie in K und beschreibe mit dem Halbmesser KA=KC aus dem Mittelpunct K einen andern Kreis, der den vorigen in D und E schneidet. Man ziehe hierauf AB, oder AF durch D oder E: so ist sowohl AB, als auch AF eine Tangente des Kreises. Denn wenn man CD, oder CE ziehet: so ist CDA=R, auch CEA=R (123 §), woraus wie vorhin folgt, daß beyde Linien Tangenten sind.

127 §.

83 F. Wenn eine grade Linie *AB* den Kreis in *D* berührt, und man ziehet den Halbmesser *CD*: so ist *CD* auf *AB* senkrecht.

Beweis.

Beweis. Wäre dies nicht: so müste eine andre grade Linie CG von C auf AB senkrecht fallen, und dann wäre CG < CD (76 §) wider die Natur der Tangente, indem nun G in der Kreisfläche fallen müste (95).

△ Eine grade Linie vom Mittelpuncte C auf die Tangente senkrecht gezogen, geht durch den Berührungspunct, denn sonst gäbe es mehr, als eine Normallinie, von C auf auf AB: und eine Linie durch D auf der Tangente AB senkrecht gesetzt geht durch den Mittelpunct C, denn sonst könnte man durch D auf AB mehr, als eine Normallinie setzen, weil CD allemahl auch auf AB senkrecht ist.

Wenn durch A zweene Tangenten des Kreises AD und AE gehen: so ist AD = AE, und CA theilt den Bogen DE bey L in zweene gleiche Theile, denn die Halbmesser CD und CE sind auf AD und AE senkrecht. Ueberdem ist CD = CE, CA = CA, also AD = AE, und ACD = ACE (78 §). Folglich auch DL = LE (116 §). 84 F.

128 §.

Wenn zweene Kreise einander in *D* berühren: so haben sie in *D* eine gemeinschaftliche Tangente. Denn eine grade Linie durch ihre Mittelpuncte C und E geht durch den Berührungspunct (50 §). Also ist AB durch D auf CE senkrecht gesetzt, eine Tangente beyder Kreise (126 §). 85 F.

Umgekehrt: Kreise, die in *D* eine gemeinschaftliche Tangente *AB* haben, berühren einander. Denn eine senkrechte Linie durch D auf AB senkrecht gesetzt, geht durch beyder Mittelpuncte (127 §). Also berühren sie einander (48. 49 §).

Wenn

Wenn zwo Kreislinien durch *D* gehen, und die Linie *AB*, welche den einen in *D* berührt, wird von *ab*, welche den andern Kreis in eben dem Punct *D* berührt, geschnitten: so schneiden die Kreise einander ebenfalls. Denn eine Normallinie DH durch D auf AB ist nun von einer Normallinie De durch D auf AB unterschieden. Der Mittelpunct des einen Kreises fällt in DH, der Mittelpunct des andern aber, in De. Also liegen die Mittelpuncte nicht mit D in grader Linie, und solche Kreise schneiden einander (50 §).

129 §.

185 F. Wenn diese Kreise DGE und DFH einander von innen berühren, und der Halbmesser CD des ersten ist kleiner, als der Halbmesser ED des zweyten; so fällt DGE ganz innerhalb des Kreises DFH (49 §). Aber die Tangente AB fällt ganz ausserhalb desselben. Demnach geht der größere Kreis DFH zwischen dem kleinern und der Tangente AB durch.

Ziehet man durch D eine grade Linie *ab* so, daß ED*a* < R wird: so schneidet diese Linie nothwendig alle Kreise, die in D einander berühren. Denn nun fällt von jedes Mittelpunct, die Normallinie auf *ab*, auf der Seite des spitzen Winkels ED*a*, und da diese kleiner ist, als die Linie von D nach eben dem Mittelpunct gezogen: so giebt es auf dieser Seite Puncte in *ab*, die innerhalb eines jeden Kreises fallen. Auf der andern Seite ist nun ED*b* stumpf, und die Tangente DB geht zwischen D*b*, und jeden dieser Kreise durch. Man nennt nun HDF, oder EDG den Winkel des Halbkreises, GDA, oder FDA aber, den Berührungs-Winkel (angulum contactus) und schliest daraus gewöhnlich diese Sätze:

130 §.

130 §.

Der Winkel des Halbkreises wie $HDF = HDf$ ist grösser, als jeder spitze Winkel, und kleiner als jeder stumpfer Winkel.

Denn EDa mag einem rechten Winkel so nahe kommen, als man will: so fällt doch allemahl ein Stück des Bogens DF zwischen Da und DA.

Da der Winkel EDb nun stumpf ist: so mag er übrigens einem rechten Winkel so nahe, als man will, kommen, es wird doch allemahl die Tangente DB zwischen dem Bogen Df, und der graden Linie Db durchgehen, und also HDf allemahl kleiner, als HDb seyn. Aus ähnlicher Ursache läst sich dieser Satz behaupten:

Der Berührungswinkel ADF ist kleiner, als jeder gradlinichte Winkel ADa. Denn ADa mag so klein seyn, wie man will: so fällt noch ein Stück des Bogens DF zwischen DA und Da.

131 §.

Dafern die Sätze des vor. § so, wie sie da ausgedruckt sind, ihre Richtigkeit haben: so ergeben sich daraus dem Ansehen nach allerhand sonderbare Folgen. Euclides hat diese Sätze, und seine Ausleger machen dabey allerhand Schwierigkeiten. Ein Winkel, heist es, der kleiner, als jeder stumpfe, und gröser, als jeder spitze Winkel ist, muß ein rechter Winkel seyn. Und dies hat ja auch wohl unstreitig seine Richtigkeit. Denn eine Zahl z. E. die gröser ist als jede Zahl, die kleiner als 4, und kleiner, als jede Zahl, die gröser als 4 ist, muß ja wohl selbst die Zahl 4 seyn. Also folgt aus dem 129 §, daß der Winkel des Halbkreises HDF ein rechter Winkel

sey. Aber aus eben der Ursache ist auch HDG ein rechter Winkel, und überhaupt die Winkel aller Halbkreise durch D, die ihre Mittelpuncte in DH haben, sind rechte Winkel. Nun sind diese Winkel alle ungleich groß 129 §. Also sind nicht alle rechte Winkel gleich groß gegen den 21 §. Noch mehr. Ein Winkel, der kleiner, als jeder gradlinichte ist, kan kein Winkel von irgend einer Größe mehr seyn. Eine Zahl, die kleiner als jede Zahl ist, kan doch wohl keine Zahl mehr seyn. Dennoch kan man nicht sagen, daß der Winkel ADF völlig nichts sey. Denn aus eben dem Grunde wäre auch ADG nichts. Aber ADG > ADF (129 §) und ein nichts kan nicht größer, als das andre seyn.

132 §.

Allein ich sollte meinen, daß alle diese anscheinenden Widersprüche wegfallen müsten, wenn man nur eine gewisse Zweydeutigkeit der Worte hebt, die über diese Lehren eine solche Dunkelheit verbreitet.

86 F. Wenn ein gradlinichter Winkel EDF einem andern gradlinichten Winkel BAC gleich ist: so past einer auf dem andern, und umgekehrt (18 §) das heißt, wenn die Spitze des einen D auf der Spitze des andern A liegt, und der eine Schenkel DF auf AC: so liegt der andre Schenkel DE auf AB. Es liegen die beyden Schenkel des einen Winkels völlig auf den beyden Schenkeln des andern, und dies rührt davon her, weil in jedem alle Theile einerley Lage gegen den andern Schenkel haben. Wenn demnach durch A eine dritte grade Linie AI gehet, die von AB und AC unterschieden ist: so fällt sie entweder ganz zwischen AB und AC in Ai; oder ganz ausserhalb diesen

diesen Schenkeln. Das ist die Ursache, warum man sagen muß, es sey IAC ▷ BAC und iAC ◁ BAC.

Aber man setze, durch G sey GH gezogen, die mit GB selbst den Winkel BGH macht, und man wollte fragen: wie groß ist der Winkel HAC, den die gebrochne Linie HGA mit AC macht? Man müste ohne Zweifel antworten: Nicht die ganze Linie HGA macht mit AC einerley Winkel; sondern das Stück AG den Winkel GAC, das Stück HG aber auf eben der Seite einen größern Winkel HgC. Frägt man also: was macht HGA mit AB für einen Winkel: so kan man wiederum nicht anders, als so antworten: nicht die ganze Linie HGA macht mit AB einerley Winkel; sondern das Stück GA gar keinen, HG aber den Winkel HGB.

Man ziehe nun GK so, daß BGK ▷ BGH wird, und frage: was macht KGA mit AC für einen Winkel? Ist wohl ein Gedanke dabey, wenn man antworten wollte, es sey der Winkel KAC ▷ HAC, oder KAc ◁ HAc. Versteht man durch HAc, KAc, oder HAC, KAC die Winkel, welche das Stück AG mit AC macht: so sind HAC, KAC, und HAc, KAc gleich groß. Versteht man aber die Winkel, welche KG, HG mit AC machen: so ist KAC ▷ HAC und KAc ◁ HAc.

Wenn die gebrochene Linie HGA oder KGA aus mehrern graden Stücken bestünde: so würde für jedes Stück die Antwort anders seyn. Jedes Stück würde gegen AC eine andre Lage haben. Aber diese Stücke hätten alle ihre bestimte Größe. Ist HGA 87 F. nun eine krumme Linie: so hat sie in jeden Punct gegen AC oder AB eine andre Lage. Gesetzt nun HGA hat in A gegen AC die Lage, welche AB gegen AC

hat; so kan eine andre krumme Linie KgA die auch durch A gehet in A gegen AC eben die Lage haben; ob dies gleich nicht angehen würde, wenn KgA, HGA grade Linien wären. Verstehet man nun durch die Winkel HAC, KAC, die Lage der krummen Linien HGA, KgA in dem Punete A gegen AC: so ist HAC=KAC=BAC, und dabey ist es gleich viel, welche Lage auch diese Linien in den übrigen Puncten gegen AC haben. Verstehet man ferner durch KAB, HAB die Lage der krummen Linien KgA, HGA in dem Punct A gegen AB: so ist KAB=○=HAB, und wenn man nun zugleich behauptet, es sey KAB > HAB, weil HGA zwischen KgA und AB durchgehet: so vergist man, daß die Lage der krummen Linien KgA, HGA gegen AB in jedem Punct anders ist.

133 §.

85 F. Wendet man dies auf die Berührungswinkel an: so siehet man leicht, daß die Sätze des 130 § nichts weiter, als dieses sagen wollen. Alle Kreise, die einander in D berühren, haben in dem Berührungspunct D gegen den gemeinschaftlichen Durchmesser DH eben die Lage, welche die Tangente AB gegen DH hat. Der Winkel, den die Halbkreise DFH, DGE mit DH in D (also auch in H, und sonst in keinem andern Punct, G oder F) mit DH machen, ist ein rechter Winkel, und mit der Tangente machen sie in D gar keinen Winkel. Ein Punct F, der den Kreis FH/D beschreibt, ändert beständig seine Richtung so, daß er in jeder folgenden Stelle seines Weges, eine andre Richtung, als in der vorigen hat, diese beyden Stellen mögen einander so nahe liegen; als man will. Man kan aber in jedem Punct seines

Weges die Richtung angeben, die er jetzt hat, das ist, diejenige, nach welcher er fortgehen würde, wenn sich seine Richtung nun nicht weiter änderte. Wäre der Punct F durch H und *f* in D angekommen, und gienge nun weiter ohne seine Richtung zu ändern: so würde er nach DA fortgehen. Dies würde auch der Punct G thun, wenn er durch E und *g* in D angelanget wäre, und nun die Richtung behielte, die er hat, indem er in D anlangt.

134 §.

Der Winkel des Abschnitts ADEB heist derjenige Winkel, den die Sehne AB des Abschnitts mit dem Bogen an seinem Endpuncte einschliest. 88 F.

Wenn GH den Kreis in B berührt, so ist ABG der Winkel des Abschnitts. Denn es sey BF ein Durchmesser: so FBE=EBG, also FBE—FBA=FBG—FBA, oder ABE=ABG.

135 §.

Der Winkel des Abschnitts ABG macht mit dem Winkel im Abschnitt ADB zweene rechte Winkel aus. 88 F.

Beweis. Wenn BF ein Durchmesser ist, und man ziehet AF: so ist FAB=R (123 §). Also AFB +ABF=R (87 §)=ABG+ABF (127 §). Also AFB=ABG. Da nun AFB+ADB=2R (124 §): so ist auch ABG+ADB=2R.

Demnach ist der Winkel des Abschnitts AFBK der den vorigen zur ganzen Kreisfläche ergänzt, nämlich ABH=dem Winkel ADB in dem vorigen Abschnitt.

136 §.

Eine gradlinichte Figur heist eine im Kreise beschriebene, wenn der Kreis durch alle ihre Winkel-

spitzen geht, und man sagt, der Kreis sey um die Figur beschrieben. Eine gradlinichte Figur aber heist eine um den Kreis beschriebene, wenn alle ihre Seiten Berührungslinien des Kreises sind, und man sagt, der Kreis sey in der Figur beschrieben.

137 §.

Eine gradlinichte Figur heist gleichwinklicht, wenn alle ihre Winkel gleich groß sind, und gleichseitig, wenn alle ihre Seiten gleich groß sind. Eine reguläre Figur ist eine solche, die lauter gleiche Seiten, und gleiche Winkel hat, und also beydes, gleichseitig, und gleichwinklicht ist. Sie heist gewöhnlich ein regulares Polygon, wenn sie mehr als vier Seiten hat. Der Winkel, welchen zwo Seiten einer solchen Figur einschliessen, heist der Polygonwinkel, und jede Seite, die Polygonseite. Die Ingenieurs haben in der Kriegsbaukunst, wo die Lehre von den Polygonen häufig angewandt wird, die Sprache eingeführt, daß sie die Polygonseite das Polygon nennen. So ist nach ihrer Sprache das Polygon zu einem Fünfeck so viel, als die Polygonseite eines regulären Fünfecks.

138 §.

Ein regulares Polygon in einem Kreise zu beschreiben, wenn vorausgesezt wird, daß man die Kreislinie in so viele gleiche Theile eintheilen könne, als verlangt wird.

89 F. Aufl. Man theile die Kreislinie in so viele gleiche Bogen, als das Polygon Seiten haben soll, und ziehe die Sehne eines jeden dieser Bogen; so ist das verlangte Polygon verzeichnet.

Beweis.

Beweis. Wenn AB, BC, CD, u. s. f. diese gleiche Bogen sind: so sind alle ihre Sehnen gleich groß (119 §). Und wenn n die Anzahl der Seiten des Polygons und so auch der gleichen Bogen ist: so steht jeder Winkel wie ABC in einem Abschnitt dessen Bogen $= \frac{2}{n}$ P ist, wenn P die Peripherie bedeutet, folglich stehen alle Winkel in gleichen Abschnitten, und sind gleich groß (123 §).

Da jede Sehne ganz im Kreise liegt: so ist jedes im Kreise beschriebene Polygon kleiner, als der Kreis, und alle Seiten desselben sind vom Mittelpunct des Kreises gleich weit entfernt. Wenn aber in eben dem Kreise ein neues Polygon beschrieben wird, das mehr Seiten hat, als das vorige: so werden die Seiten des letztern kleiner, als die Seiten des ersten waren (119 §), und sind zugleich vom Mittelpunct weiter entfernt (121 §).

Wenn KL eine gegebene Entfernung vom Mittelpunct, und KL kleiner, als der Halbmesser KB ist: so kan man im Kreise allemahl ein Polygon beschreiben, dessen Seiten vom Mittelpunct weiter, als um KL entfernt sind. Denn man ziehe AC durch L auf KL senkrecht: so schneidet AC einen Bogen ABC von bestimter Größe ab. Wenn aber P die Peripherie des Kreises ist: so kan man n allemahl so groß nehmen, daß $\frac{1}{n}$ P < ABC wird (139 §. Rech.) und dann wird die Sehne des Bogens $\frac{1}{n}$ P von K weiter, als um KL entfernt seyn (121 §).

Indessen mag man dem Polygon so viele Seiten geben, als man will: so wird es doch allemahl kleiner, als der Kreis seyn. Auch ist der Umfang eines solchen Polygons kleiner, als des Kreises Umfang, weil jede Sehne kleiner, als ihr Bogen ist (34 §).

Wenn man vom Mittelpunct des Kreises K bis an alle Winkelspitzen des Polygons A, B, C, u. s. f. die Halbmesser KA, KB, KC u. s. f. ziehet: so theilen sie das ganze Polygon in so viele gleichschenklichte Dreyecke, als Seiten vorhanden sind. Diese gleichschenklichten Dreyecke passen überdem alle auf einander (64 §). Also halbirt jeder Halbmesser, wie KB den Polygonwinkel ABC.

139 §.

89 F. **Um ein gegebenes reguläres Polygon *ABCDEFGH* einen Kreis zu beschreiben.**

Aufl. Man theile zweene an einer Seite BC anliegende Polygonwinkel ABC, BCD in zweene gleiche Theile: so werden die Theilungslinien BK, CK einander schneiden (82 §). Denn $ABC + BCD < 4R$ (89 §). Also $\frac{1}{2}ABC + \frac{1}{2}BCD = KBC + KCB < 2R$. Der Durchschnittspunct K wird der Mittelpunct des Kreises seyn, der mit dem Halbmesser KB oder KC sich um das Polygon beschreiben läßt.

Beweis. Es ist KB = KC (56 §). Man ziehe KD: so ist KCD = KBC (138 §) CD = BC, KC = KB, also past das Dreyeck *KCD* auf *KBC* (54 §) und es ist *KD* = *KC*, *KDC* = *KCB* = *KCD* = *KDE*. Also erhellet auf eben die Art, daß auch *KE* = *KD* sey, und also auch alle übrige Winkelpuncte von *K* gleichweit entfernt seyn.

140 §.

Jede Linie also, die einen Polygon Winkel halbirt, geht durch den Mittelpunct des um das Polygon zu beschreibenden Kreises.

140 §.

Der Winkel BKC am Mittelpunct des um ein regulares Polygon beschriebenen Kreises, welchen zwey nach den Endpuncten B und C einer Polygonseite gezogene Halbmesser einschliessen, heist der **Centri-Winkel.**

Dieser Centriwinkel ist allemahl $= \frac{4R}{n}$, wenn n die Anzahl der Seiten des Polygons ist. Denn alle Winkel um K machen $4R$, ihre Anzahl ist n, und sie sind alle gleich groß.

Weil $ABK + BAK = 2R - AKB$ (87 §), und $AKB = \frac{4R}{n}$ ist; so ist $ABK + BAK = 2R - \frac{4R}{n}$. Da nun $BAK = KBC$ (138 §), und folglich $ABK + BAK = ABK + KBC = ABC$ ist; so wird $ABC = 2R - \frac{4R}{n}$, welches der allgemeine Ausdruck für den Polygon-Winkel ist.

Demnach ist der Polygonwinkel allemahl kleiner als $2R$.

141 §.

Auf einer gegebenen graden Linie BC ein Polygon zu verzeichnen, das eine gegebene Anzahl von Seiten hat, wenn vorausgesetzt wird, daß man den rechten Winkel in so viele gleiche Theile eintheilen könne, als verlangt wird. 89 F.

Aufl. Man setze an der gegebenen Linie BC in B und C den halben Polygonwinkel, das ist, einen Winkel $CBK = BCK = \frac{2nR - 4R}{2n} = R - \frac{2R}{n}$ (140 §), wenn n die gegebene Anzahl der Seiten ist. In solcher Absicht muß man also einen rechten Winkel in n gleiche Theile eintheilen können, damit man eines Winkels, der $= 2\frac{R}{n}$ ist, Ergänzungszum rechten Winkel nehmen könne. Beyde Linien werden einander in K schneiden (82 §), und K wird der Mittelpunct, so wie $KB = KC$ der Halbmesser eines Kreises seyn, worin die Sehne BC zu einem Bogen gehört, der von dem ganzen Umfang $\frac{1}{n}$ Theil ist.

Beweis. Weil $KBC + KCB + BKC = 2R$, und $KBC + KCB = 2R - \frac{4R}{n}$: so ist $2R - \frac{4R}{n} + BKC = 2R$, und $2R + BKC = 2R + \frac{4R}{n}$, folglich $BKC = \frac{4R}{n}$ und $BC = \frac{1}{n}P$ (117 §), wenn P den Umfang des mit KB beschriebenen Kreises bedeutet.

142 §.

90 F. Auf der gegebenen graden Linie BC ein reguläres Sechseck zu verzeichnen.

Aufl. Man setze auf BC ein gleichseitiges Dreyeck GBC: so ist G der Mittelpunct, und $GB = BC$ ist der Halbmesser des Kreises um das Sechseck, und man kan BC in dem Umfang dieses Kreises sechsmahl herum tragen.

Be=

Beweis. Weil $GBC = GCB = R - \frac{2R}{n}$ genommen werden muß (141 §) und hier $n = 6$ ist: so wird $GBC = GCB = R - \frac{2}{6}R = R - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}R$ genommen werden müssen. Wenn man aber auf BC das gleichseitige Dreyeck GBC setzt: so wird $GBC = GCB = \frac{2}{3}R$ (87 §).

Also ist die Seite des regulären Sechsecks allemahl dem Halbmesser des um dasselbe zu beschreibenden Kreises gleich, welches auch so erhellet. Der Centriwinkel BGC im Sechseck ist $= \frac{4R}{6} = \frac{2}{3}R$, also ist das Dreyeck BGC gleichseitig (87 §) und $BC = BG$.

143 §.

Jedes reguläre Polygon *ABCDEF* ist so groß, als ein Dreyeck *KLM* dessen Grundlinie *KL* dem Umfang des Polygons die Höhe *KM* der Entfernung *GH* der Seiten vom Mittelpunct des umschriebenen Kreises gleich ist.

Beweis. Wenn n die Anzahl der Seiten des Polygons ist: so mache man $BC = KN = NO$ u. s. f. bis $KL = nKN = nBC$ wird. Es sey KM auf KL senkrecht, und $KM = GH$: so sind die Dreyecke KMN, MNO u. s. f. bis RML alle so groß, als $KMN = GBC$ (106 §). Also $KLM = nKMN = nGBC$. Aber auch $ABCDEF = n.GBC$ (138 §). Also $ABCDEF = KLM$.

144 §.

Um einen gegebenen Kreis ein reguläres Polygon zu beschreiben, wenn wiederum vorausgesetzt wird, daß man den Kreis in so viele gleiche

gleiche Theile eintheilen könne, als verlangt wird.

91 F. Aufl. Man theile die Kreislinie in so viele gleiche Theile, als das Polygon Seiten haben soll. Wenn nun P, Q, R, u. s. f. die Theilungspuncte sind: so ziehe man durch alle diese Puncte Tangenten des Kreises. Jede derselben wird die nechstfolgende schneiden, in B, C, D, E u. s. f., und alle diese Tangenten werden das verlangte Polygon einschliessen.

Beweis. Die Halbmesser KL, KM, KN u. s. f. sind auf den Berührungslinien senkrecht, und die Winkel LKM, MKN u. s. f. sind kleiner, als 2 R, weil das Polygon wenigstens 3 Seiten haben muß (30 §). Also schneidet jede Tangente AB die nechstfolgende BC (114 §).

In den Vierecken BLKM, CMKN u. s. f. sind die Winkel bey K gleich (116 §), bey L, M, N u. s. f. sind rechte Winkel, also sind die Winkel B, C, u. s. f. gleich, weil sie die gleichen Winkel bey K zu zweenen rechten Winkeln ergänzen (89 §). Weiter ist BL = BM, CM = CN u. s. f. (127 §) und LM = MN u. s. f. (119 §). Also passen die gleichschenklichten Dreyecke BLM, CMN u. s. f., auf einander (90 §), und es ist auch BM = MC, CN = ND u. s. f. Folglich sind auch alle Seiten AB, BC, CD u. s. f. gleich groß.

Weil die Winkelpuncte B, C, D, u. s. f. nothwendig ausserhalb des Kreises fallen (125 §), so ist jedes um einen Kreis beschriebene Polygon größer, als der Kreis.

Und weil die gebrochene Linie LBM > Bog. LM, MCN > Bog. MN u. s. f. (126 §) so ist der Umfang des Polygons größer, als des Kreises Umfang.

Wenn man BK ziehet: so stehet diese Linie auf LM senkrecht, denn sie halbirt LKM, und LBM, so daß $BKL = \frac{1}{2} LKM$ ist. Bekomt das Polygon mehr Seiten, als vorhin: so wird der Bogen LM, folglich LKM und BKL kleiner, als vorhin. Also wird auch BL kleiner (91 §), folglich auch BK, (76 §).

Ist KB eine gegebene Entfernung vom Mittelpunct, die größer, als der Halbmesser ist: so kan man allemahl um den Kreis ein reguläres Polygon beschreiben, dessen Winkel-Spitzen vom Mittelpunct nicht so weit, als B entfernt sind. Denn man ziehe durch B beyde Tangenten BL, BM: so erhält man einen bestimten Bogen LM. Aber, wenn n die Anzahl der Seiten des Polygons ist: so kan man n so groß nehmen, daß $\frac{1}{n} P < LM$ wird, wenn P den Umfang des Kreises bedeutet (139 §. Rech.) Dann aber sind die Spitzen des Polygons, das eine so grosse Anzahl Seiten hat, von K nicht so weit, als B entfernt.

145 §.

91 F. In einem regulären Polygon *ABCDEFGH* einen Kreis zu beschreiben.

Aufl. Man halbire zwo aneinander liegende Seiten AB, BC in L und M mit senkrechten Linien LK, MK. Diese werden einander innerhalb des Polygons schneiden (114 §), weil $ABC < 2R$ (140 §). Wenn K der Durchschnittspunct ist: so verzeichne man aus dem Mittelpunct K mit dem Halbmesser KL oder KM einen Kreis, dieser wird alle Seiten des Polygons berühren, und der verlangte Kreis seyn.

Beweis.

Beweis. Es sey um das Polygon ein Kreis beschrieben (139 §): so werden alle Seiten des Polygons gleiche Sehnen des um dasselbe beschriebenen Kreises seyn. Die senkrechten Linien KL, KM, KN, u. s. f. also, welche diese Sehne halbiren gehen durch den Mittelpunct K des umschriebenen Kreises, und die Sehnen selbst AB, BC u. s. f. sind von diesem Mittelpunct K gleichweit entfernt. Demnach sind KL, KM, KN, u. s. f. gleich groß, und ein Kreis, mit KL oder KM beschrieben gehet durch die Puncte L, M, N, u. s. f. und berührt alle Seiten des Polygons, weil alle Winkel, wie KLB, KMC, KND, u. s. f. rechte Winkel sind.

Ein jedes reguläres Polygon ist also einem Dreyeck gleich, dessen Grundlinie so groß ist, als der Umfang des Polygons, die Höhe aber so groß, als der Halbmesser des in demselben beschriebenen Kreises (143 §).

146 §.

92 F. Wenn in dem Kreise ein reguläres Polygon *ABC* beschrieben ist, und man beschreibt in eben dem Kreise statt des vorigen *ABC* ein anders *ADBECF*, das doppelt so viele Seiten hat: so geht von der Differenz des Kreises und des ersten Polygons mehr, als die Hälfte ab, und die Differenz des zweyten Polygons vom Kreise ist kleiner, als die Hälfte der Differenz des ersten Polygons vom Kreise.

Beweis. Wenn jeder Bogen ADB, BEC u. s. f. wozu die Seiten des ersten Polygons ABC als Sehnen gehören, in D, E, u. s. f. halbirt wird, und man ziehet von jedem Theilungspunct bis zu den Endpuncten jeder Seite des vorigen Polygons ABC

die

die Sehnen AD, DB u. s. f.: so erhält man das zweyte Polygon ADBECF. Das erste war von Kreise um so viele Kreisabschnitte, als es Seiten hatte, unterschieden, wovon jeder = ADBL war. Indem man nun das zweyte Polygon verzeichnet: so geht von jedem dieser Abschnitte ein Dreyeck = ADB ab. War also die Anzahl der Seiten im Polygon ABC: so war dessen Differenz vom Kreise = n ADBL, und hievon geht n. ADB ab. Es darf also nur bewiesen werden, daß das Dreyeck ADB $> \frac{1}{2}$ ADBL sey, denn so folgt von selbst, es sey auch nADB $> \frac{1}{2} n$ ADBL. Man ziehe den Halbmesser KD, welcher AB in L schneidet, und senkrecht halbirt (118 §). Durch D sey die Tangente GH des Kreises gezogen: so ist GH mit AB parallel (80 §). Aus A und B richte man AG, BH über AB senkrecht auf: so ist ABHG ein Rechteck, und das Dreyeck ADB $= \frac{1}{2}$ ABHG (106 §). Aber es ist ABHG $>$ ADBL, also $\frac{1}{2}$ ABHG $> \frac{1}{2}$ ADBL. Folglich auch ADB $> \frac{1}{2}$ ADBL, und n ADB $> \frac{1}{2} n$ ADBL. Also ist das, was von der Differenz des ersten Polygons und Kreises abgehet, mehr als ihre Hälfte, und die Differenz des zweyten Polygons vom Kreise ist kleiner, als die Hälfte der Differenz des ersten vom Kreise.

Man kan also im Kreise allemahl ein reguläres Polygon beschreiben, dessen Differenz vom Kreise kleiner, als jede gegebene Größe ist.

Es sey e eine gegebene Größe, so klein man will, und P ein Polygon, dessen Differenz vom Kreise = D ist: so kan man die ganze Zahl n so groß nehmen, daß $\frac{1}{n}$ D $< e$ wird (139 §. Rech.) Man verdop-

pelte

pele die Seiten des Polygons P, und beschreibe im Kreise ein andres p, dessen Differenz vom Kreise $= d$ ist: so ist $d < \frac{1}{2}D$. Man verdoppele wieder die Seiten des Polygons p, und beschreibe im Kreise ein andres Π dessen Differenz vom Kreise $= \Delta$ ist, so wird $\Delta < \frac{1}{2}d$, und weil $d < \frac{1}{2}D$ ist, so wird $\Delta < \frac{1}{4}D$ seyn. Auf eben die Art erhellet, wenn man die Verdoppelung der Seiten fortsetzet, das des dritten Polygons Differenz vom Kreise $< \frac{1}{8}D$, oder $< \frac{1}{2^3}D$, des vierten $< \frac{1}{2^4}D$ und also überhaupt des $r$ten Polygons π Differenz vom Kreise $\delta < \frac{1}{2^r}D$ seyn werde. Wenn man nun die Arbeit so lange fortsetzet, daß entweder $2^r = n$ oder $2^r > n$ wird: so wird im ersten Falle $\frac{1}{2^r}D = \frac{1}{n}D$, und im zweyten $\frac{1}{2^r}D < \frac{1}{n}D$ in beyden Fällen aber $\delta < e$ seyn müssen.

147 §.

Wenn eine Figur Q kleiner, als der Kreis ist: so kan man im Kreise ein reguläres Polygon beschreiben, welches grösser, als diese Figur ist.

Beweis. Die Differenz der Figur Q vom Kreise sey e: so ist $Q + e = K$, wenn K den Kreis bedeutet. Man beschreibe nach dem 146 § im Kreise ein reguläres Polygon π, dessen Differenz δ vom Kreise kleiner als e ist: so hat man auch $\pi + \delta = K$, also $\pi + \delta = Q + e$ und $\pi > Q$, weil $\delta < e$ ist (28 § R.)

148 §.

148 §.

Wenn um den Kreis ein reguläres Polygon *ABC* beschrieben ist, und man beschreibt um eben den Kreis ein andres *LMNOPQ*, das doppelt so viele Seiten, als das vorige hat: so geht von der Differenz des ersten Polygons *ABC* und des Kreises mehr als die Hälfte ab, und die Differenz des zweyten Polygons vom Kreise ist kleiner, als die Hälfte der Differenz des ersten Polygons vom Kreise war. 93 F.

Beweis. Man halbire jeden Bogen EDF, FHG u. s. f. durch dessen Endpuncte die Seiten des ersten Polygons ABC als Tangenten des Kreises gehen in D, H, I u. s. f. und ziehe durch die neuen Theilungspuncte Tangenten des Kreises LM, NO u. s. f. so erhält man ein neues Polygon LMNOPQ, welches doppelt so viel Seiten, als das vorige hat. Das erste war vom Kreise um so viel vermischtlinichte Dreyecke, als es Seiten hat, unterschieden, davon jedes = AEDF war. Indem man nun das zweyte Polygon verzeichnet: so geht von jedem dieser vermischtlinichten Dreyecke ein gradlinichtes = ALM ab. War die Anzahl der Seiten des ersten Polygons n: so war seine Differenz vom Kreise = n. AEDF, und hievon geht n. ALM ab, wenn man das zweyte Polygon verzeichnet. Man ziehe den Halbmesser KD, dieser steht auf LM senkrecht (127 §), und weil LD = DM (144 §) AL = AM: so geht KD verlängert durch A (59 §). Nun ist AM > DM (75 §) und DM = MF (144 §). Also AM > MF. Folglich das Dreyeck ADM > DMF (106 §), und ADM > $\frac{1}{2}$ ADF. Nun ist ADF größer, als das vermischtlinichte Dreyeck ADSF, also $\frac{1}{2}$ ADF

$\succ \frac{1}{2}$ADSF; folglich auch ADM $\succ \frac{1}{2}$ADSE. Es ist aber ADM $=$ ADL, und ADSF $=$ADER, also auch ADL $\succ \frac{1}{2}$ ADRE, und ADM $+$ ADL $\succ \frac{1}{2}$ (ADSF $+$ ADRE), oder ALM $\succ \frac{1}{2}$AEDF. Derwegen wird auch n ALM $\succ \frac{1}{2}n$ AEDF seyn, oder das was von der Differenz des ersten Polygons vom Kreise abgehet, ist mehr, als ihre Hälfte, so daß die Differenz des zweyten Polygons vom Kreise kleiner ist, als die Hälfte der Differenz des ersten Polygons von demselben.

Also kan man um jeden Kreis ein reguläres Polygon beschreiben, dessen Differenz vom Kreise kleiner ist, als jede gegebene Größe e, welches eben so, wie im 146 § erhellet.

149 §.

93 F. Dafern eine Figur Z größer, als der Kreis ist: so kan um den Kreis ein reguläres Polygon beschrieben werden, welches kleiner, als die Figur Z ist.

Beweis. Die Differenz der Figur Z vom Kreise sey e: so ist $Z = K + e$, wenn K den Kreis bedeutet. Man beschreibe um den Kreis ein reguläres Polygon π, dessen Differenz δ vom Kreise kleiner, als e ist: so hat man $K + \delta = \pi$. Da aber $\delta < e$, und also $K + \delta < K + e$ ist (25 § Rech.): so wird nun $\pi < Z$ seyn.

150 §.

94 F. Wenn eine grade Linie FG so lang ist, als die Peripherie ABC eines Kreises K und man setzt auf FG ein Dreyeck FGH, dessen Höhe HF dem Halbmesser KD des Kreises K gleich ist: so ist das Dreyeck FGH der Kreisfläche K gleich.

Beweis.

Beweis. Es sey das Dreyeck FGH $\prec$ K: so kan man im Kreise ein reguläres Polygon P verzeichnen, welches größer, als FGH ist (147 §). Es sey also P $\succ$ FGH, und man ziehe eine grade Linie LM, die dem Umfang des Polygons P gleich ist: so ist LM $\prec$ ABC (138 §). Also auch LM $\prec$ FG. Man setze auf LM ein Dreyeck LMN, dessen Höhe NL $=$ KE ist: so wird NL $\prec$ KD (77 §), und also auch NL $\prec$ HF seyn. Es ist aber P $=$ LMN (143 §), und LMN $\prec$ FGH (106 §), also wird P $\prec$ FGH seyn, welches der Voraussetzung widerspricht, indem P $\succ$ FGH seyn soll, und beydes zugleich kan nicht wahr seyn. Demnach ist das Dreyeck FGH nicht kleiner, als der Kreis K.

Es sey nun das Dreyeck FGH $\succ$ K: so kan man um den Kreis ein reguläres Polygon Π verzeichnen, welches kleiner als FGH ist (149 §). Es sey demnach $\Pi \prec$ FGH, und man ziehe eine grade Linie PQ, die dem Umfang des Polygons Π gleich ist: so ist PQ $\succ$ ABC (144 §). Folglich PQ $\succ$ FG. Man setze auf PQ ein Dreyeck PQR, dessen Höhe PR dem Halbmesser KD gleich ist, so ist auch PR $=$ HF. Nun ist $\Pi =$ PQR (145 §). Aber PQR $\succ$ FGH (106 §). Also $\Pi \succ$ FGH, welches wiederum der Voraussetzung widerspricht, vermöge welcher $\Pi \prec$ FGH seyn soll. Also kan das Dreyeck FGH nicht größer als die Kreisfläche K seyn. Da es nun auch nicht kleiner seyn konnte: so muß FGH $=$ K seyn.

Der VI. Abschnitt.

Allgemeine Lehren von den Verhältnissen und Proportionen.

151 §.

Es sind bisher zwar häufig ausgedehnte Größen, als grade Linien, Winkel, Dreyecke, u. s. f. mit einander verglichen, und zugleich Kennzeichen festgesetzet worden, nach welchen man die Prüfung anstellen kan, ob ein paar Größen von dieser Art gleich oder ungleich groß sind; und welche von beyden im letztern Falle die größere, welche die kleinere sey. Allein, noch ist die Frage nicht vorgekommen, wie groß denn eigentlich eine Linie gegen die andre, ein Winkel gegen den andern, ein Dreyeck gegen das andre sey u. s. f. Man siehet leicht, wenn eine Frage von dieser Art beantwortet werden sollte, daß man auf die Lehren werde zurück gehen müssen, welche im 166 u. f. §§. der Rechenkunst in Anwendung auf die Zahlen vorgetragen sind. Die Größe einer Linie gegen die andre, eines Winkels gegen den andern, eines Dreyecks gegen das andre, ist nichts anders, als das Verhältniß der einen Linie, des einen Winkels, des einen Dreyecks gegen die andre dieser Grössen. Oft kan man das Verhältniß einer solchen Grösse gegen die andre, z. E. einer Linie gegen die andre, durch eine Zahl ausdrücken, die eben so groß gegen die Einheit ist. Wäre eine Linie A 5 Fuß, und eine andre B 3 Fuß lang: so wäre $B = \frac{3}{5} A$, und $B : A = \frac{3}{5} : 1$,

$\frac{3}{5}$: 1, indem B den fünften Theil von A dreymahl enthielte. Aber bey dieser Art die Vergleichung anzustellen, liegt allemahl die Voraussetzung zum Grunde, daß beyde Größen, die man mit einander vergleicht, ein gemeinschaftliches Maaß haben, oder daß ein aliquoter Theil der einen Größe zugleich ein aliquoter Theil der andern sey. Größen von dieser Art heissen commensurable Größen, und von dieser Art sind alle Zahlen, die sich durch eine bestimte Anzahl Ziffern ausdrücken lassen. Aber man darf nicht voraussetzen, daß jede zwo grade Linien, oder überhaupt jede zwo andre ausgedehnte Größen, ebenfalls ein gemeinschaftliches Maaß haben. In der Folge wird bewiesen werden, daß oft das Gegentheil statt finde, so daß sich zuweilen gar kein aliquoter Theil der einen angeben läst, der zugleich ein aliquoter Theil der andern wäre. Solche Größen, die kein gemeinschaftliches Maaß haben, heissen incommensurable Größen.

152 §.

Man kan ein paar Größen von der letzten Art zwar auf eine ähnliche Art, wie die commensurablen Größen mit einander vergleichen, man kan fragen, wie groß eine gegen die andre sey. Aber die Größe der einen gegen die andre, wird sich durch keine bestimte Zahl ausdrücken lassen: durch keine ganze, weil sonst die eine ganz ein Maaß der andern wäre, auch durch keine gebrochne Zahl, weil sonst ein aliquoter Theil der einen so oft in der andern enthalten wäre, als der Zehler des Bruchs anzeigt. Sind A und B ein paar commensurable Größen, und man wollte z. E. annehmen, es wäre $B = \frac{7}{4} A$: so wäre

$\frac{1}{4}$A in A viermahl, in B siebenmahl enthalten, welches gegen die Voraussetzung ist. Nimt man inzwischen eine andre Größe, welche man will, etwa eine Linie für die Einheit an, z. E. einen Fuß, eine Ruthe u. s. f.: so könnte es wohl seyn, daß eine andre Linie *m* gegen diese Einheit eben so groß wäre, als B gegen A ist.

153 §.

Die Größe von B gegen A heist hier nun im ganz allgemeinen Verstande das **Verhältniß** von B gegen A, beyde Größen mögen übrigens commensurable, oder incommensurable seyn. Und wenn eine dritte Größe *m* gegen die angenommene Einheit eben so groß ist, als B gegen A: so heist *m* der **Exponent** des Verhältnisses von B zu A. Ist die Größe B gegen A eben so groß, als eine dritte D gegen die vierte C: so ist das Verhältniß von B zu A dem Verhältniß von D zu C gleich, und diese Gleichheit zweyer Verhältnisse heist eine **Proportion**. Man behält auch hier die übrigen im 169 und 170 § der Rechenkunst bereits erklärten Redensarten bey, wenn gleich statt der Zahlen andre Größen verstanden werden.

Die beyden Glieder eines Verhältnisses müssen von einerley Art seyn: es ist aber nicht nothwendig, daß alle vier Glieder einer Proportion von einerley Art sind.

154 §.

Wenn A und B commensurable Größen sind: so wird der Exponent *m* des Verhältnisses von B zu A sich durch eine Zahl ausdrücken lassen. Nun wird entweder A selbst, oder ein aliquoter Theil von A etliche mahl in B enthalten seyn, und also wird *m* ebenfalls entweder die Einheit selbst, oder einen ähnlichen

ali=

aliquoten Theil derselben eben so oft enthalten. Diese Zahl, welche *m* in einem solchen Falle ausdrückt, läst sich durch die Division finden (169 § Rech.).

Nun geht dies zwar nicht völlig in eben dem Verstande an, wenn A und B incommensurabel sind; allein es wird sich bald ergeben, daß der Begriff der Division sich auch auf diese Fälle erweitern lasse; dies ist die Ursache, weswegen man auch hier das Verhältniß B zu A durch eben die zweene Puncte (:) bezeichnet, welche sonst das Zeichen der Division abgaben, und zwar auf diese Art, B:A. Also wird auch der Ausdruck B:A=D:C im allgemeinsten Verstande eine Proportion bezeichnen, wie im 170 §. d. R.

155 §.

Es ist einerley, ob man schreibt $B:A=D:C$ oder $A:B=C:D$. Der erste Ausdruck sagt, es sey B gegen A so groß, als D gegen C, und der andre; es sey A gegen B so groß, als C gegen D. Man sieht aber leicht, daß eines eine Folge vom andern sey.

Wenn also *m* der Exponent des Verhältnisses B:A ist; so ist nicht allein B:A=*m*:1 (153 §), sondern auch A:B=1:*m*.

156 §.

Wenn zwo Größen einander gleich sind, und zwo andre sind ebenfalls gleich groß; so sind ohne Zweifel diese vier Größen einander proportional. So ist 4:4=6:6, und überhaupt A:A=B:B.

Wären aber die beyden ersten Größen gleich, und die beyden letzten ungleich, oder umgekehrt, die beyden letzten gleich, und die beyden ersten ungleich groß: so könnten diese Größen einander nicht proportional seyn. Es ist unstreitig 4:3 un= 6:6.

Wenn die erste größer als die zwote und die dritte kleiner, als die vierte; oder die erste kleiner, als die zwote, und die dritte größer, als die vierte ist: so findet zwischen diesen vier Größen wiederum keine Proportion statt. Es ist ohne Zweifel 4:3 un= 5:6, und 4:7 un= 3:2.

157 §.

Woferne man also aus andern Gründen versichert ist, daß vier Größen einander proportional sind, und man weis überdem, daß die erste der zweyten gleich sey; so ist auch die dritte der vierten gleich. Dafern aber die erste größer oder kleiner, als die zwote ist: so muß auch die dritte im ersten Falle größer, und im zweeten Falle kleiner, als die vierte seyn. Ist die Proportion $A:B=C:D$ richtig, und ist $A=B$: so ist zugleich $C=D$, dafern aber $A>B$: so ist auch $C>D$, und wenn $A<B$: so muß auch $C<D$ seyn.

158 §.

Ohne Zweiffel ist jedes Verhältniß sich selber gleich (9 §. R.), und von gleichen Größen wird man in Verhältnissen und Proportionen eine an die Stelle der andern setzen können, ohne daß dies die Verhältnisse und Proportionen ändert (7 §. Rech.). Hält man demnach vier Größen A, B, C, D, gegen einander, und findet, daß die erste A der dritten C, und die zwote B der vierten D gleich sey: so ist es gewiß, daß die Proportion $A:B=C:D$ richtig sey. Denn es ist $A:B=A:B$, weil man nun C statt A, und D statt B setzen kan: so wird $A:B=C:D$ seyn.

159 §.

Zwey Verhältnisse, die einem und demselben dritten, oder auch zween andern gleichen Ver=

Verhältnissen gleich sind, sind auch unter sich gleich groß (11 §. Rech.). Ist A:B=C:D, und E:F=C:D: so ist auch A:B=E:F. Und wenn A:B=C:D, und E:F=G:H, überdem aber C:D=G:H ist; so folgt daraus, es sey A:B=E:F.

160 §.

Wenn ein paar Verhältnisse ungleich groß sind: so heist eines von beyden das größere, und das andre, das kleinere. Es ist aber überhaupt zu sagen, das Verhältniß B:A größer, als das Verhältniß D:C, wenn B gegen A größer, als D gegen C ist. Ein paar besondre Fälle davon sind folgende.

Wenn A=C, und B>D ist: so ist B:A>D:C z. E. 12:4>8:4. Wäre B=D und A>C: so wäre wiederum B:A>D:C. Z. E. 12:4>12:6.

161 §.

Ein Verhältniß, das größer, oder kleiner ist, als eines von zwoen gleichen Verhältnissen, ist auch größer, oder kleiner, als das andre. Und ein Verhältniß, das größer ist, als das größere, oder kleiner, als das kleinere, zweyer ungleicher Verhältnisse, ist auch größer oder kleiner, als das andre (13 §. Rech.).

162 §.

Wenn alle vier Glieder einer Proportion von einerley Art sind, und es ist das zweyte Glied dem vierten gleich: so muß auch das erste dem dritten gleich seyn.

Ist nemlich B:A=D:C, und A=C: so kan nicht B>D seyn, weil sonst B:A>D:C wäre (160 §). Es soll aber B:A=D:C, also auch

$A:B=C:D$ seyn (155 §), welches der Voraussetzung wieder entgegen ist.

Man kan überhaupt sagen: **Wenn zwey gleichnahmichte Glieder einer Proportion gleich sind: so müssen auch die beyden andern gleich seyn.** Ist nemlich $B:A=D:C$, so ist auch $A:B=C:D$. Aber es ist erwiesen, wenn $A=C$ ist, daß auch $B=D$ seyn müsse. **Wenn demnach die beyden ersten gleichnahmichten Glieder gleich sind: so müssen auch die beyden letzten gleich seyn.**

163 §.

Ist aber in einer Proportion gleichartiger Größen $B:A=D:C$, das erste Glied B größer, oder kleiner, als das dritte D: so muß auch das zweyte A im ersten Fall größer, und im zweyten Fall kleiner, als das vierte seyn.

Beweis. Wenn die Proportion $B:A=D:C$ richtig ist, und es ist überdem $B>D$; so kan einmahl nicht $A=C$ seyn, weil sonst $B:A>D:C$ seyn würde (160 §). Es kan auch nicht $A<C$ seyn. Denn es sey $E=C$: so ist $B:E>D:C$ (160 §). Wäre nun $A<C$: so wäre $A<E$, und $B:A>B:E$ (160 §), folglich $B:A>D:C$ (160 §), welches, wie vorhin, wider die Voraussetzung streitet. Wenn demnach $B>D$ ist: so muß auch $A>C$ seyn. Aber es ist einerley, ob man schreibt, $B:A=D:C$, oder $D:C=B:A$. Ist also in einer Proportion das erste Glied D kleiner, als das dritte B; so ist zugleich das zweyte C kleiner, als das vierte A.

164 §.

Man kan überhaupt sagen: **Es müssen in jeder Proportion die beyden Glieder des einen Verhält-**

hältnisses entweder beyde zugleich größer; oder beyde zugleich kleiner seyn, als die beyden gleichnahmichten Glieder des andern, dafern sie alle vier gleichartig sind. Denn aus der Proportion B:A = D:C folgt A:B = C:D, und umgekehrt. Ist also das zweyte Glied B größer, als das vierte D: so muß das erste A größer seyn, als das dritte C. Und da man auch setzen kan, C:D = A:B: so folgt, wenn das zweyte Glied D kleiner, als das vierte B ist, daß auch das erste C kleiner, als das dritte A seyn müsse (163 §).

165 §.

Wenn man eine Größe mit einer Zahl multiplicirt; so verhält sich die Einheit zum Multiplicator, wie das Multiplicandum zum Product (30. 106. 107 §. R.). Diese Eigenschaft der Multiplication kan man für die Erklärung der Multiplication im allgemeinsten Verstande annehmen. Eine Größe mit einer andern Größe multipliciren, heist zur gegebenen Einheit, dem Multiplicator und Multiplicande die vierte Proportional-Größe suchen, welche letztere denn das Product heist. Es ist nicht nothwendig, daß beyde Factoren von einerley Art sind, nur muß die Einheit mit dem Multiplicator von einerley Art seyn (153 §).

166 §.

Dividirt man aber eine Größe mit einer Zahl: so verhält sich der Divisor zur Einheit, wie das Dividendum zum Quotienten (42. 111 §. Rech.). Auch dies wird nunmehro die Erklärung der Division im allgemeinsten Verstande. Eine Größe durch eine andere Größe dividiren, heist zum Divisor der

Ein-

Einheit und dem Dividendo die vierte Proportional-Größe suchen, welche letztere nun der Quotient wird. Es ist nicht nothwendig, daß das Dividendum mit dem Divisor von einerley Art sey; aber die Einheit und der Divisor müssen gleichartig seyn. (153 §). Es wäre nicht nöthig, diese Begriffe so allgemein zu machen, wenn sie nicht weiter, als in der Rechenkunst gebraucht würden. Allein diese Redensarten werden auch in der Geometrie, und überdem in einer andern noch allgemeinern Wissenschaft gebraucht, worin eine solche Allgemeinheit der Begriffe schlechterdings nothwendig ist.

167 §.

Wenn nun gleich die Begriffe der Multiplication und Division in dieser Allgemeinheit gebraucht werden: so bleiben democh beyde Operationen einander so entgegen gesetzt, daß eine die andere aufhebt.

Das Product $F = M \times m$ mit dem Multiplicator m dividirt, giebt das Multiplicandum, und der Quotient $Q = \frac{D}{d}$ mit dem Divisor d multiplicirt, giebt das Dividendum.

Bew. des 1. S. Es ist nemlich $1 : m = M : F$ (165 §), oder $m : 1 = F : M$ (155 §), und $m : 1 = F : \frac{F}{m}$ (166 §). Also $F : \frac{F}{m} = F : M$ (159 §) und $\frac{F}{m} = M$ (162 §).

Bew. des 2. S. Ferner ist $d : 1 = D : Q$ (166 §), oder $1 : d = Q : D$ (155 §), und $1 : d = Q : Q \times d$ (165 §). Also $Q : Q \times d = Q : D$ (159 §) und $Q \times d = D$ (162 §).

168

168 §.

Es bleibt auch noch richtig, daß gleiches durch gleichen multiplicirt, gleiche Producte, und gleiches durch gleichen dividirt, gleiche Quotienten giebt.

Bew. des 1. §. Ist $A=B$, und man multiplicirt beydes mit C; so wird $1:C=A:A\times C$, und $1:C=B:B\times C$ (165 §). Also $A:A\times C=B:B\times C$ (159 §), und $A\times C=B\times C$ (162 §).

Bew. des 2. §. Wenn aber $A=B$ ist, und beydes durch C dividirt wird: so hat man $C:1=A:\frac{A}{C}$, und $C:1=B:\frac{B}{C}$ (166 §). Also wiederum $A:\frac{A}{C}=B:\frac{B}{C}$ (159 §), und $\frac{A}{C}=\frac{B}{C}$ (162 §).

169 §.

Der Divisor d ist der Exponent des Verhältnisses des Dividendi D zum Quotienten Q, weil $d:1=D:Q$ (152 §). Aber es ist $D=Q\times d$ (169 §), und wenn D und d Zahlen sind: so ist auch $D=d\times Q$ (33. 109. 116 §. Rech.). Also $1:Q=d:D$ (165 §).

Dies ist der Grund, warum der Exponent des Verhältnisses einer Zahl zur andern durch die Division gefunden wird. Aber es darf nicht ohne Beweis angenommen werden, daß das allgemeine richtig sey, wenn die allgemeinsten Begriffe der Multiplication und Division gebraucht werden. Folgende Lehren werden die Gründe zu diesem Beweise abgeben.

170 §.

170 §.

Verhältnisse, die gleiche Exponenten haben, sind gleich groß, und umgekehrt: Wenn zwey Verhältnisse gleich sind: so müssen ihre Exponenten gleich seyn.

Beweis. Wenn der beyden Verhältnisse B:A und D:C Exponent $= m$ ist: so hat man B:A $= m:1$, und D:C $= m:1$ (153 §). Also B:A $=$ D:C (159 §). Umgekehrt: Wenn m des Verhältnisses B:A, und n des Verhältnisses D:C Exponent ist: so hat man B:A $= m:1$, und D:C $= n:1$. Ist nun überdem B:A $=$ D:C: so ist $m:1 = n:1$ (159 §). Also $m = n$ (162 §).

171 §.

Aus zwoen Proportionen von dieser Art $A:B = C:D$, und $B:E = D:F$ folgt diese dritte $A:E = C:F$.

Beweis. Es sey n der Exponent der Verhältnisse B:A und D:C, und m der Exponent der Verhältnisse E:B, und F:D; so hat man $1:n =$ A:B, und $1:n =$ C:D (152 §). Also $B = A \times n$, und $D = C \times n$ (165 §). Ferner $1:m =$ B:E, und $1:m =$ D:F, also $E = B \times m$ und $F = D \times m$ (165 §). Also auch $E = A \times n \times m$, und $F = C \times n \times m$. Aus diesen beyden Sätzen folgt $1:n \times m =$ A:E, und $1:n \times m =$ C:F (165 §). Also A:E $=$ C:F (159 §).

Die alten Geometer drückten sich hier so aus: Es folge aus den beyden ersten Proportionen *ordinatim, & ex æquo* die dritte.

172 §.

172 §.

Wenn in einer Proportion $A:B = C:D$ die Glieder des einen Verhältnisses $A:B$ commensurabel sind; so müssen auch die Glieder des andern $C:D$ commensurable Größen seyn. Wenn nemlich m der Exponent des Verhältnisses $B:A$ ist: so ist m eine Zahl bey der angenommenen Voraussetzung (154 §). Also ist m auch der Exponent des Verhältnisses $D:C$ (170 §). Also müssen auch C und D commensurabel seyn (151 §). Verhältnisse und Proportionen von dieser Art nent man rationale Verhältnisse und Proportionen.

Es sey nun $1:m = A:B$: so ist $B:A \times m$, und weil auch $C:D = 1:m$: so ist $D = C \times m$ (165 §). Demnach wird der allgemeinste Ausdruck einer rationalen Proportion dieser seyn: $A:A \times m = C:C \times m$, wenn m eine Zahl bedeutet, es mag nun eine ganze oder gebrochne Zahl seyn. Man kan $\frac{n}{m}$ statt m schreiben, und dabey voraus setzen, daß n und m ganze Zahlen bedeuten sollen: so ist der Fall, wenn der Exponent eine ganze Zahl ist, mit darunter begriffen, wenn $m = 1$ ist. Also wird dies der allgemeinste Ausdruck einer jeden rationalen Proportion $A:A \times \frac{n}{m} = C:C \times \frac{n}{m}$, oder auch $A:\frac{n}{m}A = C:\frac{n}{m}C$, wenn man den Multiplicator der Kürze wegen voran schreibt.

173 §.

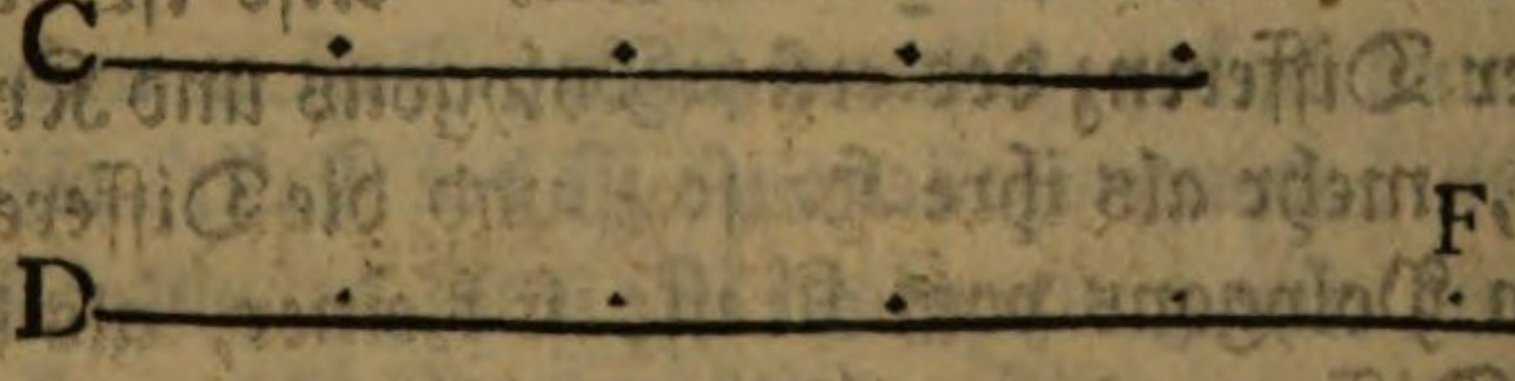
Dafern nun in der Proportion $A:B = C:D$ die Glieder des einen Verhältnisses $A:B$ incommensurabel

bel sind: so müssen die Glieder des andern Verhältnisses C:D ebenfalls incommensurabel seyn. Denn widrigenfalls wären A und B commensurabel (172 §). Verhältnisse und Proportionen, deren Glieder incommensurable Grösen sind, werden irrationale Verhältnisse und Proportionen genant.

174 §.

Wenn das Verhältniß $D:C$ irrational ist: so kan man allemahl ein Paar Grösen angeben, zwischen welchen die Grösse D, als zwoen Grenzen enthalten ist, deren Verhältniß zu C rational, und deren Differenz von einander kleiner ist, als jede Grösse, die sich angeben läst.

Beweis. Es sollen C und D ein Paar incommensurable Grösen z. E. ein paar Linien seyn. Man theile C in eine beliebige



Menge gleicher Theile, z. E. in 4 Theile. Wenn nun die Linie D sich bis nach E erstreckt: so trage man $\frac{1}{4}$C so oft auf DE auf, als es angehet. Im gegenwärtigen Fall wird es fünf mahl angehen, und man erhält $DF = \frac{5}{4}A$: Aber es ist noch $DF < DE$, oder $\frac{5}{4}A < DE$. Trüge man $\frac{1}{4}A$ noch einmahl auf von F nach G: so würde $DG = \frac{6}{4}A$ werden. Aber es ist schon $DG > DE$. Man hat also ein Paar Grenzen $\frac{5}{4}A$ und $\frac{6}{4}A$, zwischen welchen DE fällt, und beyder Verhältniß gegen C ist rational (172 §). Ihre Differenz ist $\frac{1}{4}A$.

Aber

Aber man hätte C gleich Anfangs in weit mehr, als vier gleiche Theile eintheilen können: so würden diese Theile viel kleiner geworden seyn. Um dieser Sache ihre völlige Allgemeinheit zu geben, setze man, es sey C in m gleiche Theile eingetheilet worden, und man habe befunden, daß n solcher Theile würklich in D enthalten seyn; $n+1$ solcher Theile aber schon die Größe D übertreffen: so wird D zwischen den Grenzen $\frac{n}{m}$C und $\frac{n+1}{m}$C enthalten seyn. Diese beyde Grenzen sind nur um $\frac{1}{m}$C unterschieden, und diese Differenz ist desto kleiner, je größer m genommen worden. Nun mag aber e eine so kleine Größe seyn, als man will: so kan m allemahl so groß genommen werden, daß $\frac{1}{m}$C $< e$ wird (139 §. Rech.).

175 §.

Wenn das eine Glied B eines irrational Verhältnisses $A:B$ zwischen den Grenzen $\frac{n}{m}A$ und $\frac{n+1}{m}A$ fällt, und das gleichnahmichte Glied D eines andern irrational Verhältnisses $C:D$, fällt zwischen eben solchen Grenzen $\frac{n}{m}$C und $\frac{n+1}{m}C$, die sich gegen C so verhalten, wie die vorigen gegen A, und dies allemahl, es

mag m so groß, als man will, genommen werden; so ist $A:B=C:D$.

Beweis. Vermöge der Voraussetzung ist allemahl $\frac{n}{m}A<B$, und $\frac{n+1}{m}A>B$, zugleich aber $\frac{n}{m}C<D$, und $\frac{n+1}{m}C>D$, wie groß auch m genommen wird. Wofern nun die vierte Proportional-Größe zu A, B, C, nicht $=D$ ist: so muß sie entweder größer, oder kleiner, als D seyn.

Es sey demnach $E<D$, und $A:B=C:E$. Die Differenz zwischen E und D sey d, so daß $E+d=D$.

Man nehme m so groß, daß $\frac{1}{m}C<d$ wird (139 § Rech.): so wird auch die Differenz zwischen D und $\frac{n}{m}C$ kleiner, als d seyn. Ist nemlich $\frac{n}{m}C+\delta=D$: so ist doch $\delta<\frac{1}{m}C$, also $\delta<d$. Aber nun ist $\frac{n}{m}C+\delta=E+d$ (11 §. R.), folglich $\frac{n}{m}C>E$ (28 § Rech.). Ferner hat man $\frac{n}{m}A:A=\frac{n}{m}C:C$ (172 §), und vermöge der Voraussetzung $A:B=C:E$. Hieraus würde nach dem 171 § die Proportion folgen $\frac{n}{m}A:B=\frac{n}{m}C:E$. Da nun $\frac{n}{m}C>E$ ist: so müste vermöge des 157 § $\frac{n}{m}A>B$ seyn, welches der Voraussetzung widerspricht.

Es

Es sey nun $F > D$, und $A:B = C:F$. Die Differenz zwischen F und D sey e: so ist $F = D + e$. Man nehme wiederum m so groß, daß $\frac{1}{m} C < e$ wird (139 §. Rech.): so ergiebt sich von selbst, daß auch die Differenz zwischen D und $\frac{n+1}{m} C$ kleiner, als e werde. Es sey $D + \varepsilon = \frac{n+1}{m} C$: so ist $\varepsilon < \frac{1}{m} C$. Also $\varepsilon < e$, folglich $D + \varepsilon < D + e$ (25 §. Rech.), d. i. $\frac{n+1}{m} C < F$. Aber es ist $\frac{n+1}{m} A : A = \frac{n+1}{m} C : C$ (172 §), und vermöge der Voraussetzung $A:B = C:F$. Also $\frac{n+1}{m} A : B = \frac{n+1}{m} C : F$ (187 §). Weil nun $\frac{n+1}{m} C < F$, so müste $\frac{n+1}{m} A < B$ seyn (157 §), welches ebenfalls der Voraussetzung entgegen ist.

Kan aber diese vierte Proportional-Größe weder kleiner, noch größer, als D seyn: so ist sie gewiß $= D$, und also $A:B = C:D$.

176 §.

Wenn das eine Glied D des Verhältnisses $C:D$ nicht allemahl zwischen den Grenzen $\frac{n}{m} C$

und $\frac{n+1}{m}C$ fällt, die sich gegen C so verhalten, wie die Grenzen $\frac{n}{m}A$ und $\frac{n+1}{m}A$, zwischen welchen das gleichnahmichte Glied B des Verhältnisses $A:B$ enthalten ist: so sind A, B, C, D nicht proportional.

Beweis. Es ist vermöge der Voraussetzung nicht allemahl $\frac{n}{m}C < D$, und $\frac{n+1}{m}C > D$, wenn $\frac{n}{m}A < B$ und $\frac{n+1}{m}A > B$ ist. Diesemnach muß eine solche Größe, die allemahl zwischen den Grenzen $\frac{n}{m}C$ und $\frac{n+1}{m}C$ enthalten ist, von D unterschieden seyn. Dafern also allemahl $\frac{n}{m}C < E$ und $\frac{n+1}{m}C > E$ ist: so muß E nicht $=D$ seyn. Es ist aber $A:B = C:E$ (175 §). Wäre nun auch $A:B = C:D$: so müste $C:E = C:D$ (159 §), und $E=D$ seyn (162 §), welches dem vorigen widerspricht. Also ist $A:B$ nicht $=C:D$.

177 §.

Wenn demnach vier Größen A, B, C, D proportional sind, und das eine Glied B des Verhältnisses $A:B$ ist zwischen den Grenzen $\frac{n}{m}A$ und $\frac{n+1}{m}A$ enthalten: so muß das gleichnahmichte D des Verhältnisses $C:B$ allemahl zwischen solchen Grenzen enthalten seyn, die sich gegen C eben so verhalten,

wie

wie jene gegen A. Denn widrigenfalls wäre A:B nicht =C:D (176 §), welches gegen die Voraussetzung streitet.

178 §.

Aus der Proportion $A:B=C:D$ folgt auch diese, $A+C:B+D=A:B$ (*anteced. & consequ. summando*).

Beweis. Wenn die Proportion rational ist: so kan man allemahl $B=\frac{n}{m}A$, und $D=\frac{n}{m}C$ setzen (172 §), so daß man $A:\frac{n}{m}A=C:\frac{n}{m}C$ erhält. Da nun $B+D=\frac{n}{m}(A+C)$ (125. 38 §. R.), und $A+C:\frac{n}{m}(A+C)=A:\frac{n}{m}A$ (172 §): so ist $A+C:B+D=A:B$.

Wenn aber die Proportion $A:B=C:D$ irrational, und $\frac{n}{m}A<B$, $\frac{n+1}{m}A>B$ ist: so muß allemahl zugleich $\frac{n}{m}C<D$, und $\frac{n+1}{m}C>D$ seyn (177 §). Dies giebt folgende Sätze: $\frac{n}{m}(A+C)<B+D$ und $\frac{n+1}{m}(A+C)>B+D$ (125. 25 §), welche allemahl wahr sind, wie groß auch m genommen wird. Nimt man hiemit die Sätze $\frac{n}{m}A<B$

$< B$ und $\frac{n+1}{n} A > B$ zusammen: so folgt aus dem (175 §) es sey $A+C:B+D=A:B$.

179 §.

Wenn $A:B$ nicht $= C:D$; so ist auch $A+C:B+D$ nicht $= A:B$.

Beweis. Es sey $A:B=C:E$, und also E un $=D$; so ist $A+C:B+E=A:B$ (178 §). Wäre nun auch $A+C:B+D=A:B$: so hätte man $A+C:B+E=A+C:B+D$ (159 §), und $B+E=B+D$ (162 §). Also $E=D$ (28 §. R.) wider die Vorausſetzung.

180 §.

Wenn $A:B=C:D$, und es ist $C<A$; so ist auch $A-C:B-D=A:B$ (*anteced. & conſequ. differentiando*), und $A+C:B+D=A+C:B-D$.

Beweis. Wenn $C<A$, so ist auch $D<B$ (163 §). Wäre nun $A:B$ un $= A-C:B-D$, so wäre auch $C:D$ un $= A-C:B-D$, also $C+A-C:D+B-D$ un $=C:D$ (179 §), d. i. $A:B$ un $=C:D$, welches der Vorausſetzung entgegen ist. Es war aber $A+C:B+D=A:B$ (178 §), also ist auch $A+C:B+D=A-C:B-D$ (159 §).

181 §.

Wenn man zwo Gröſſen A und B mit einerley Zahl multiplicirt oder dividirt: so verhalten sich die Producte wie die Multiplicanda, und die Quotienten, wie die Dividenda.

Beweis. Weil $A:B=A:B$: so ist $A+A:B+B=A:B$ (178 §), d. i. $2A:2B=A:B$. Es sey n

eine

eine ganze Zahl: so folgt aus der Proportion $nA : nB = A : B$, allemahl auch $(n+1)A : (n+1)B = A : B$. Denn die Proportion $nA : nB = A : B$ giebt $nA + A : nB + B = A : B$ (176 §), d. i. $(n+1)A : (n+1)B = A : B$. Aber die Proportion $nA : nB = A : B$ ist wahr für $n = 2$, also auch für $n = 3$, folglich auch für $n = 4$ u. s. f., folglich für alle ganze Zahlen.

Demnach ist auch $\frac{A}{m} : \frac{B}{m} = m\frac{A}{m} : m\frac{B}{m} = A : B$, wenn m eine ganze Zahl ist.

Eben so wird auch $n\frac{A}{m} : n\frac{B}{m} = \frac{A}{m} : \frac{B}{m}$ folglich $\frac{n}{m}A : \frac{n}{m}B = A : B$ (166 §. R.).

Also auch $\left(A : \frac{m}{n}\right) : \left(B : \frac{m}{n}\right) = \frac{n}{m}A : \frac{n}{m}B$ (113 §. R.) $= A : B$.

182 §.

In jeder Proportion $A : B = C : D$, deren Glieder alle gleichartig sind, kan man die mittlern Glieder verwechseln, und es wird auch (*permutando*) $A : C = B : D$ eine richtige Proportion seyn.

Beweis. Ist die Proportion rational: so kan man $B = \frac{n}{m}A$, und $D = \frac{n}{m}C$ setzen, so daß man den Ausdruck erhält $A : \frac{n}{m}A = C : \frac{n}{m}C$ (172 §).

Man verwechsele die mittlern Glieder: so folgt die Richtigkeit der Proportion $A:C = \frac{n}{m}A:\frac{n}{m}C$, o= der $A:C = B:D$ aus dem 181 §.

Wenn aber die Proportion $A:B = C:D$ irrational ist: so lassen sich B und D zwischen zwoen Grenzen einschliessen, die gegen A und C einerley rationales Verhältniß haben, und die man nach Gefallen verengern kan, so, daß allemahl folgende Sätze zugleich wahr sind, $\frac{n}{m}A < B$ $\frac{n+1}{m}A > B$, und $\frac{n}{m}C < D$, $\frac{n+1}{m}C > D$, wie groß auch m genommen werden mag. Dafern nun die vierte Proportional-Größe zu A, C, und B nicht $= D$ ist: so muß sie entweder kleiner oder größer seyn.

Es sey $E < D$, und $A:C = B:E$; die Differenz zwischen E und D sey d: so ist $E + d = D$. Man nehme m so groß, daß $\frac{1}{m}C < d$ wird: so erhellet, daß auch die Differenz zwischen D und $\frac{n}{m}C$ kleiner, als d werde. Wenn nemlich $\frac{n}{m}C + \delta = D$ ist: so ist $\delta < \frac{1}{m}C$, also $\delta < d$, da nun $\frac{n}{m}C + \delta = E + d$: so ist $\frac{n}{m}C > E$ (28 § Rech.). Aber es ist $A:C = \frac{n}{m}A:\frac{n}{m}C$, und vermöge der Voraussetzung

$A:C = B:E$, folglich $\frac{n}{m}A:\frac{n}{m}C = B:E$ (159 §).

Weil nun $\frac{n}{m}C > E$; so wird $\frac{n}{m}A > B$ (164 §) gegen die Voraussetzung.

Es sey nun $F > D$, und $A:C = B:F$. Die Differenz zwischen F und D sey e so, daß $F = D+e$ ist. Man nehme m so groß daß $\frac{1}{m}C < e$ wird: so ist auch die Differenz zwischen D und $\frac{n+1}{m}C$ kleiner, als e. Wenn nämlich $D+\varepsilon = \frac{n+1}{m}C$ ist: so wird $\varepsilon < \frac{1}{m}C$, und also $\varepsilon < e$. Also ist auch $D+\varepsilon < D+e$ (25 § R.) d. i. $\frac{n+1}{m}C < F$. Es ist aber $A:C = \frac{n+1}{m}A:\frac{n+1}{m}C$, und es wird vorausgesetzt, es sey $A:C = B:F$. Dies giebt $\frac{n+1}{m}A:\frac{n+1}{m}C = B:F$ (159 §). Da nun $\frac{n+1}{m}C < F$: so müste $\frac{n+1}{m}A < B$ seyn (164 §) gegen die Voraussetzung.

Weil also diese vierte Proportionalgröße weder kleiner, noch größer, als D seyn kan: so ist $A:C = B:D$.

183 §.

Der Satz des 181 §. ist allgemein wahr. Wenn zwo Grösßen *A* und *B* durch eine dritte *C* multiplicirt, oder dividirt werden: so verhalten sich die Producte wie die Multiplicanda, und die Quotienten wie die Dividenda.

Beweis d. 1 S. Weil $1 : C = A : A \times C$, und $1 : C = B : B \times C$ (165 §) so ist $A : A \times C = B : B \times C$ (159 §) und $A : B = A \times C : B \times C$ (182 §).

Bew. d. 2 S. Eben so ist $C : 1 = A : \frac{A}{C}$ und $C : 1 = B : \frac{B}{C}$. Also $A : \frac{A}{C} = B : \frac{B}{C}$ (159 §) und $A : B = \frac{A}{C} : \frac{B}{C}$ (182 §).

184 §.

Wenn beyde Factoren von einerley Art sind: so geben sie mit veränderter Ordnung einerley Product.

Und wenn das Dividendum mit dem Divisor von einerley Art ist: so verhält sich auch der Quotient zur Einheit, wie das Dividendum zum Divisor.

Bew. d. 1 S. Es sey $M \times m = F$: so ist $1 : m = M : F$ (165 §). Also auch $1 : M = m : F$ (182 §), folglich $F = m \times M$ (165 §) und $M \times m = m \times M$.

Bew. d. 2 S. Es sey $\frac{D}{d} = Q$: so ist $d : 1 = D : Q$ (166 §), also auch $d : D = 1 : Q$ (182 §), oder $Q : 1 = D : d$ (155 §).

185 §.

185 §.

Der erste Satz wird also auch richtig seyn, wenn gleich das Product aus mehr, denn zweenen Factoren bestehet. Man kan die Ordnung derselben wie man will ändern, ohne daß dadurch die Größe des Products selbst geändert wird.

186 §.

Es erhellet hieraus zugleich die allgemeine Richtigkeit der Sätze des 169§. Es ist allgemein wahr, daß der Exponent des Verhältnisses B:A mit dem Quotienten $\frac{B}{A}$ einerley sey; weil nun auch $B:A = \frac{B}{A}:1$ (183 §): und dies rechtfertigt die Bezeichnung der Verhältnisse, welche im 154§ angenommen worden. Wenn nun demnach $A:B = C:D$, und überdem $\frac{B}{A} = m$: so muß auch $\frac{D}{C} = m$ seyn (170§). Dies giebt $B = mA$, und $D = mC$. Also ist der Ausdruck $A:mA = C:mC$ (172 §) ganz allgemein, und erstreckt sich auch auf die irrationalen Proportionen, nur daß sich in diesem Fall der Exponent m durch keine Zahl genau ausdrucken läst.

187 §.

Wenn nemlich B und A incommensurabel sind: so fällt der Begriff eines Bruchs im genauesten Verstande genommen, bey dem Ausdruck $\frac{B}{A}$ weg. Weil man aber B zwischen zwoen Grenzen von dieser Art: $\frac{n}{m}A$, und $\frac{n+1}{m}A$ einschliessen kan, die sich nach

Gefallen verengern lassen: so kan man auch den Quotienten $\frac{B}{A}$ durch Brüche, so nahe man will, ausdrücken, ob es gleich im scharfen Verstande nie genau angeht, so lange m und n bestimte Werthe haben.

Da nemlich allemahl $\frac{n}{m} A < B$, und $\frac{n+1}{m} A > B$:

so ist allemahl $\frac{n}{m} < \frac{B}{A}$ und $\frac{n+1}{m} A > \frac{B}{A}$

(183 §). Aber es kan $\frac{1}{m}$ kleiner werden, als jede Zahl, die sich angeben läst (139 §. R.) und also wird zugleich der Unterschied zwischen $\frac{n}{m}$ und $\frac{B}{A}$ kleiner, als jede Zahl, die sich angeben läst. Sollte aber $\frac{B}{A}$ durch $\frac{n}{m}$ völlig genau ausgedrückt werden: so müste m größer genommen werden, als jede Zahl, die man angeben kan. Die Exponenten aller Irrational-Verhältnisse sind Brüche von dieser Art (186 §). und sie gehören in die Classe der Irrational-Brüche oder Irrational-Zahlen (191 §. R.)

188 §.

Jedes Verhältniß läst sich also durch zwo ganze Zahlen ausdrücken, entweder ganz genau, oder doch so nahe, als man verlanget.

Ist nämlich $\frac{B}{A} = \frac{n}{m}$, und das Verhältniß rational: so sind n und m ein paar bestimte ganze Zahlen, und

und man hat $A:B=1:\frac{n}{m}$, oder $A:B=m:n$ (183 §). Ist aber das Verhältniß irrational: so wird $\frac{B}{A}$ durch $\frac{n}{m}$ desto genauer ausgedruckt, je gröſser m, und also auch n genommen wird, und das Verhältniß $m:n$ wird mit dem Verhältniß $A:B$ desto genauer überein kommen, je näher der Bruch $\frac{n}{m}$ den Quotienten $\frac{B}{A}$ ausdrückt. Hiebey ist nun noch dies zu merken, daß jedes Verhältniß sich auf unzählig viele verschiedene Arten durch zwo ganze Zahlen ausdrücken lasse (183 §). Wenn man aber beyde Zahlen mit ihrem gröſten gemeinschaftlichen Maaß dividirt: so erhält man das Verhältniß durch seine kleinsten Zahlen ausgedrückt (88. 89 § R.)

189 §.

Verbindet man die Sätze des 178, 180 und 182 §, so folgen daraus noch diese Regeln, nach welchen sich die Glieder einer Proportion verändern lassen, so daß vier neue Proportional-Gröſsen heraus kommen.

Wenn $A:B=C:D$: so ist auch

I) Zusammengesetzt oder getheilt (componendo, vel dividendo) $A+B:B=C+D:D$, oder $A-B:B=C-D:D$.

Beweis. Denn $A:C=B:D$ (182 §) $A+B:C+D=B:D$ (178 §) und $A-B:C-D=B:D$ (180 §). Also auch $A+B:B=C+D:D$ (182 §) und $A-B:B=C-D:D$.

II)

II) **Umgekehrt** (convertendo) $A:A+B=C:C+D$ oder $A:A-B=C:C-D$.

Beweis. Aus $A:C=B:D$ (182 §) folgt auch $A:C=A+B:C+D$ (174 §) oder $A:C=A-B:C-D$ (180 §). Also $A:A+B=C:C+D$, oder $A:A-B=C:C-D$ (182 §).

III) Aus den beyden Proportionen $A+B:A=C+D:C$, und $A:A-B=C:C-D$, folgt auch nach dem 171 §. Diese $A+B:A-B=C+D:C-D$; also ferner IV) nach dem 182 § $A+B:C+D=A-B:C-D$.

190 §.

Man kan zwey gleichnahmichte Glieder einer Proportion mit einerley Größe multipliciren oder dividiren, und man erhält eine neue Proportion.

Beweis. Wenn $A:B=C:D$: so ist $A:C=B:D$ (182 §), und $A:C=nA:nC$ (183 §), also $nA:nC=B:D$ (195 §) und $nA:B=nC:D$ (182 §). Eben so erhellet auch die Richtigkeit der Proportion

$$\frac{A}{n}:B=\frac{C}{n}:D.$$

191 §.

Aus zwoen oder mehrern Proportionen von dieser Art:

$$A:B=C:D$$
$$E:F=C:D$$
$$G:H=C:D \text{ u. s. f.}$$

wenn die ersten beyden Glieder alle gleichartig sind, folgt $A+E+G$ rc$:B+F+H$ rc$=C:D$.

Beweis. Aus den ersten beyden folgt $A:B=E:F$

(II

E:F (159 §), und diese giebt A+E:B+F=A:B (178 §) oder A+E:B+F=C:D (159 §). Diese mit der dritten zusammengenommen giebt eben so die Folge A+E+G:B+F+H=C:D. So kan man nun von jeder Anzahl von Proportionen auf die nechstfolgende schliessen, die um eines größer ist. Also gilt der Satz für so viele Proportionen, als man will.

192 §.

Die Sätze des 38 und 48 § R. sind noch wahr, wenn die Multiplication und Division im allgemeinsten Verstande genommen werden.

Beweis. Wenn $M=A+B+C$ u. s. f. und $M \times m=F$: so hat man

$1:m=A:A \times m$

$1:m=B:B \times m$

$1:m=C:C \times m$ u. s. f.

Also $1:m=A+B+C$ rc: $A \times m+B \times m+C \times m$ rc (188 §). Folglich $(A+B+C \text{ rc}) \times m=F=A \times m+B \times m+C \times m$ rc (165 §).

Wann ferner $D=A+B+C$ rc, und $\frac{D}{d}=Q$; so ist

$d:1=A:\frac{A}{d}$

$d:1=B:\frac{B}{d}$

$d:1=C:\frac{C}{d}$ u. s. f.

Also

Also $d : 1 = \frac{A}{d} + \frac{B}{d} + \frac{C}{d}$ rc

(188 §) und $\frac{A+B+C \text{ rc}}{d} = \frac{A}{d} + \frac{B}{d} + \frac{C}{d}$ rc (166 §).

Wenn man hiemit den 180§ verbindet; so erhellet eben so, daß auch überhaupt $(A-B) \times C = A \times C - B \times C$, und $(A-B) : C = A : C - B : C$ sey.

193 §.

Aus zwoen Proportionen von dieser Art $A : B = C : D$, und $B : E = F : C$ folgt (*perturbate & ex æquo*) die dritte $A : E = F : D$.

Beweis. Es sey n der Exponent der Verhältnisse $B : A$, und $D : C$: so hat man $1 : n = A : B$, und $1 : n = C : D$ (155 §). Also $B = A \times n$, und $D = C \times n$. Ferner sey m der Exponent der Verhältnisse $E : B$ und $C : F$: so hat man $1 : m = B : E$, und $1 : m = F : C$; also $E = B \times m$, und $C = F \times m$ (165 §). Hieraus folgt $E = A \times n \times m$, und $D = F \times m \times n$, welches die Proportionen giebt $1 : n \times m = A : E$, und $1 : m \times n = F : D$ (165 §). Da nun $n \times m = m \times n$ (184 §), so wird $A : E = F : D$.

194 §.

Bey gleichen Dividendis verhalten sich die Quotienten umgekehrt, wie die Divisores.

Beweis. Es sey $\frac{D}{d} = Q$: so ist $d : 1 = D : Q$.

Es sey ferner $\frac{D}{\delta} = q$: so ist $\delta : 1 = D : q$, oder $1 : \delta = q : D$.

$= q : D$. Aber aus $d : 1 = D : Q$ und $1 : \delta = q : D$, folgt, $d : \delta = q : Q$ (193 §).

195 §.

Wenn in zwoen Proportionen $A : B = C : D$, und $E : F = G : H$ die beyden ersten gleichnahmichten Glieder beyder Proportionen einander proportional sind: so sind auch die beyden letztern einander proportional.

Beweis. Weil $A : E = C : G$, und $E : F = G : H$: so ist $A : F = C : H$ (171 §). Ueberdem ist $B : A = D : C$, also $B : F = D : H$.

196 §.

Wenn in zwoen Proportionen $A : B = C : D$ und $E : F = G : H$ die gleichnahmichten Glieder der einen den gleichnahmigten Gliedern der andern proportional sind: so sind die Summen oder Differenzen der Glieder wie sie nach einander folgen, proportional.

Beweis. Weil $A : E = C : G$: so ist $A + E : E = C + G : G$ (189 §), und weil $E : F = G : H$: so wird $A + E : F = C + G : H$ (171 §). Da aber ferner $B : F = D : H$ (195 §); so ist $F : B + F = H : D + H$ (189 §). Also auch $A + E : B + F = C + G : D + H$ (171 §).

197 §.

Der erste Satz des vorigen § läst sich auch auf mehr, als zwo Proportionen anwenden. Es sey

$A : B = C : D$
$E : F = G : H$
$I : K = L : M$ u. s. f.

Wenn nun A:E:I = C:G:L; so folgt auch, daß B:F:K = D:H:M. sey (195 §). Also wird auch A+E:E = C+G:G (196 §), folglich A+E: I = C+G:L (171 §) und eben so B+F:K = D +H:M. Da nun A+E:B+F = C+G:D+H (196 §): so wird auch A+E+I:B+F+K = C+ G+L:D+H+M. So kan man von jeder Anzahl von Proportionen auf die nechstfolgende schliessen, und also gilt der Satz von so viel Proportionen, als man will, wenn ihre gleichnahmigten Glieder proportional sind.

Sind also in mehrern Proportionen von dieser Art zwo gleichnahmichte Glieder einerley, wie in folgenden:

A:*a* = B:*b*
C:*a* = D:*b*
E:*a* = F:*b* u. s. f.

so hat man

A+C+E+ etc : *na* = B+D+F+ etc:*nb*,

wenn *n* die Anzahl der Proportionen ist. Also ist auch:

A+C+E+ etc: *a* = B+D+F+ etc: *b*

(190 §).

198 §.

Die Rechnungs-Regeln für die Brüche, welche im VI Abschnitt der Rechenkunst erwiesen sind, erstrecken sich auch auf die irrationalen Brüche. Es ist schon erwiesen, daß ein Bruch von der letztern Art mit dem Quotienten des Zehlers durch den Nenner dividirt einerley sey (187 §). Und aus dem 183 § folgt, daß der Bruch einerley Größe behalte, wenn sein Zehler und Nenner mit einerley Größe multiplicirt

cirt oder dividirt wird. Wenn nun $\frac{B}{A}$ u. s. f. irrationale Brüche bedeuten: so ergeben sich leicht folgende Sätze:

1) Es ist $\frac{B}{A} \times C = \frac{B \times C}{A}$

Beweis. Denn $A : 1 = B : \frac{B}{A}$ (166 §) und $B \times C : \frac{B}{A} \times C = B : \frac{B}{A}$ (183 §) also $A : 1 = B \times C : \frac{B}{A} \times C$ (159 §), folglich $\frac{B}{A} \times C = \frac{B \times C}{A}$ (166 §).

Also ist auch $\frac{B}{A} \times C = \frac{B}{A : C}$, weil $\frac{B \times C}{A} = \frac{B}{A : C}$ (183 §).

2) Es ist $\frac{B}{A} : C = \frac{B : C}{A}$.

Beweis. Denn es ist auch $(B : C) : \left(\frac{B}{A} : C\right) = B : \frac{B}{A}$ (183 §). Also $A : 1 = (B : C) : \left(\frac{B}{A} : C\right)$ und $\frac{B}{A} : C = \frac{B : C}{A}$ (166 §).

Also ist auch $\frac{B : C}{A} = \frac{B}{A \times C}$ (183 §).

3) Mit einem irrationalen Bruch multipliciren heist mit seinem Zehler multipliciren, und das Pro-

duct durch den Nenner dividiren, oder mit dem Nenner dividiren, und den Quotienten durch den Zehler multipliciren. Denn es ist $1 : \frac{B}{A} = C : C \times \frac{B}{A}$,

und $1 : \frac{B}{A} = A : B$ (183 §) $= C \times A : C \times B = C : \frac{C \times B}{A}$. Also $1 : \frac{B}{A} = C : \frac{C \times B}{A}$, und $C \times \frac{B}{A} = \frac{C \times B}{A} = \frac{C}{A} \times B$ (1 S.).

4) Mit einem irrationalen Bruch dividiren heist mit dem umgekehrten Bruch multipliciren, denn $\frac{B}{A} : 1 = C : \left(C : \frac{B}{A}\right)$ (166 §) und $\frac{B}{A} : 1 = B : A = 1 : \frac{A}{B}$ (183 §). Also $1 : \frac{A}{B} = C : \left(C : \frac{B}{A}\right)$ (159 §) und $C : \frac{B}{A} = C \times \frac{A}{B}$ (165 §).

Dies sind die Hauptsätze, woraus alle übrigen Regeln für die Rechnungen mit Brüchen folgen, also müssen alle diese Regeln noch gelten, wenn gleich die Brüche irrational sind.

199 §.

Demnach sind auch alle Sätze allgemein wahr, welche im 174 bis zum 177 § der Rechenkunst für die Rational-Zahlen erwiesen worden.

Die Producte aller Glieder mehrerer Proportionen nach der Ordnung genommen, sind einander proportional, eben so, wie die Quotienten.

Die vierte Proportional-Größe zu A, B, C, ist = $\frac{B}{A} \times C = \frac{B \times C}{A}$, und umgekehrt: aus $\frac{B \times C}{A}$ = D folgt A:B=C:D, oder A:C=B:D (182 §). Aus A:B=C:D folgt A × D=B × C: und umgekehrt, u. s. f.

200 §.

Also sind auch die Begriffe von der geometrischen Progreßion (178. 179 §. R.) nicht blos auf die Zahlen eingeschränkt; sondern ihre Glieder können auch Linien und andre geometrische Größen seyn. Die Quadratwurzel aus einer Linie ist zwischen dieser Linie und der Einheit die mitlere Proportional-Linie und die Cubikwurzel aus einer Linie ist die erste von zween mitlern Proportional-Linien zwischen der Einheit, und jener Linie, u. s. f.

Der VII. Abschnitt.

Von der Aehnlichkeit der Figuren.

201 §.

Wenn eine Seite *AB* eines Dreyecks *ABC* in eine beliebige Anzahl gleicher Theile *Aa*, *ab*, *bc*, u. s. f. eingetheilt ist, und man ziehet durch alle Theilungspuncte, *a*, *b*, *c* u. s. f. mit der anliegenden Seite *BC*, die Parallelen *af*, *bg*, *ch*, u. s. f.: so theilen diese die dritte Seite *AC* in eben so viele gleiche Theile. 95 F.

Beweis. Jede Parallele schneidet auch AC und zwar zwischen A und C, weil sie alle die Seite AB unter dem Winkel $Aaf = ABC$ schneiden, und also durch die Fläche des Dreyecks durchgehen müssen (33 §). Also giebt es in AC so viele Theile, als in AB. Durch alle Theilungspuncte *a*, *b*, *c*, u. s. f. ziehe man mit AC die Parallelen *am*, *bn*, u. s. f. bis an die nechste Parallele: so hat man in den Dreyecken Aaf und *abm* die Seite $Aa = ab$, den Winkel $aAf = bam$, und $Aaf = abm$ (84 §), folglich $am = Af$ (90 §). Aber es ist auch $am = fg$ (98 §). Also $Af = fg$. Aus ähnlicher Ursache ist $bn = am$ (90 §) $= fg$, und $bn = gh$ (98 §). Also auch $fg = gh$. Da diese Schlüsse von jedem Stück auf das nechst folgende allemahl gelten: so sind alle Theile in AC gleich groß.

202 §.

95 F. Eine gegebene grade Linie *AC* in eine verlangte Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Aufl. Man ziehe durch A eine andre grade Linie AB, die mit AC einen beliebigen Winkel BAC macht. Auf AB nehme man ein Stück *Aa* von willkührlicher Größe, und trage es von *a* in *b*, von *b* in *c* u. s. f. so oft auf (42 §) bis man auf AB so viele Theile hat, als AC haben soll. Wenn nun der letzte Theilungspunct B ist: so ziehe man BC, und durch alle Theilungspuncte *a*, *b*, *c* u. s. f. mit BC Parallelen: so theilen diese die Linie AC in die verlangte Anzahl gleicher Theile (201 §).

203 §.

95. 96 F. Wenn eine grade Linie *DE* zwo Seiten *AB* und *AC* eines Dreyecks *ABC* in *D* und *E* schneidet, und mit der dritten Seite *BC* parallel liegt:

liegt: so sind die beyden abgeschnittenen Stücke *AD*, *AE*, den dazu gehörigen Seiten *AB*, *AC* proportional.

Beweis. Dafern AD und AB ein gemeinschaftliches Maaß haben: so sey *Aa* dieses gemeinschaftliche Maaß, und $AB = m.Aa$. Nun wird man *Aa* von A nach B *m* mahl auftragen können, und es wird ein Theilungspunct in D fallen. Man ziehe durch alle Theilungspuncte mit BC Parallelen. Diese werden AC gleichfalls in *m* gleiche Theile eintheilen so, daß $AC = m.Af$ wird. Wenn nun AD *n* solcher Theile enthält, wovon *m* in AB enthalten sind, und also $AD = n.Aa$ ist; so wird auch $AE = n.Af$ seyn (201 §). Man hat also $Aa = \frac{1}{m}AB$, $Af = \frac{1}{m}AC$; ferner $AD = \frac{n}{m}AB$, und $AE = \frac{n}{m}AC$. Nun ist aber $AB : \frac{n}{m}AB = AC : \frac{n}{m}AC$ (172 §), also $AB:AD = AC:AE$, oder $AB:AC = AD:AE$ (182 §).

Wenn AD und AB kein gemeinschaftliches Maaß haben, und man theilt AB in eine beliebige Menge gleicher Theile: so kan nie ein Theilungspunct in D fallen. Aber wenn durch alle Theilungspuncte mit BC die Parallelen *af*, *bg*, u. s. f. gezogen werden: so liegt DE zwischen zwoen solchen Parallelen, und wenn D zwischen dem *n*ten und $(n+1)$ten Theilungspunct in AB fällt: so liegt allemahl auch E zwischen dem *n*ten und $(n+1)$ten Theilungspunct in AC. Wenn also $\frac{n}{m}AB < AD$ und $\frac{n+1}{m}AB > AD$ ist: so

fällt AE allemahl zwischen eben solchen Grenzen, und es ist zugleich $\frac{n}{m}$ AC $\prec$ AE, und $\frac{n+1}{m}$ AC $\succ$ AE, was auch m und n für ganze Zahlen bedeuten. Demnach ist auch in diesem Fall AB:AD $=$ AC:AE (175 §) oder AB:AC $=$ AD:AE.

Es folgt hieraus, daß auch die Stücke DB, und EC zwischen den Parallelen den beyden andern Stücken AD, AE proportional seyn. Denn aus AB:AD $=$ AC:AE folgt (189 §) (dividendo) AB $-$ AD:AD $=$ AC $-$ AE:AE, oder DB:AD $=$ EC:AE, oder auch DB:EC $=$ AD:AE.

Diese beyden Stücke zwischen den Parallelen sind also ebenfalls den zugehörigen Seiten proportional. Denn die beyden Proportionen AB:AC $=$ AD:AE, und DB:EC $=$ AD:AE geben die dritte AB:AC $=$ DB:EC (159 §).

204 §.

95 F. Wenn zwo Seiten *AB*, *AC* eines Dreyecks *ABC* in *D* und *E* so getheilt sind, daß die beyden Stücke der einen Seite *AB* den beyden Stücken der andern *AC* proportional sind: so ist die grade Linie *DE* durch die Theilungspuncte mit der dritten Seite *BC* parallel.

Beweis. Es sey AD:BD $=$ AE:EC, und DE nicht mit BC parallel: so muß durch D eine andre grade Linie DF mit BC parallel gezogen werden können. Dann aber ist AD:DB $=$ AF:FC (203 §), und es wird vorausgesetzt, es sey AD:DB $=$ AE:EC, deswegen müste AF:FC $=$ AE:EC seyn, welches nicht angehet. Wenn nämlich F über E fällt:

so

so ist AF < AE, also müste FC < EC seyn (164 §), welches sich widerspricht. Ein ähnlicher Widerspruch käme hieraus, wenn F unter E fiele. Demnach muß DE selbst mit BC parallel seyn.

205 §.

Zwo grade Linien *AB*, *CD*, werden von dreyen Parallelen *AC*, *EF*, *BD*, allemahl so geschnitten, daß die Stücke zwischen den Parallelen *AE*, *EB*, *CF*, *FD* einander proportional sind. 97 F.

Beweis. Wenn auch AB und CD parallel sind: so ist der Satz für sich klar, weil sodann AE = CF, und EB = FD ist (98 §). Also AE:EB = CF:FD (158 §). Wenn aber AB nicht mit CD parallel ist: so sey durch A mit CD die Parallele AG gezogen, welche BD in G, und EF in H schneidet: so wird AH = CF, und HG = FD (98 §). Da nun AE:EB = AH:HG (203 §), so ist auch AE:EB = CF:FD.

Es ist also auch AE + EB:EB = CF + FD:FD, oder AB:EB = CD:FD, und AE + EB:AE = CF + FD:CF, oder AB:AE = CD:CF.

Umgekehrt: Wenn ein paar grade Linien *AB*, *CD* zwischen zwoen Parallelen *AC*, und *BD* in *E* und *F* so getheilet sind, daß *AE*:*EB* = *CF*:*FD*; so ist *EF* mit *AC* und *BD* parallel. Denn wäre nicht EF; sondern EK mit BD und AC parallel, so wäre auch AE:EB = CK:KD, also CF:FD = CK:KD, welches nicht seyn kan.

Schneiden demnach ein paar grade Linien AB und CD einander in L, und es fällt L zwischen den Parallelen AC, und BD: so ist AL:LB = CL:LD. 98 F.

Denn man kan durch L die dritte Parallele *ef* ziehen, da denn der vorige Beweis gilt.

Auch umgekehrt: Wenn die entgegengesetzten Schenkel AL, LB, CL, LD, der Scheitel-Winkel ALC, BLD einander proportional sind; so ist AC # BD. Denn wäre nicht BD # AC: so sey B*d*, welche CD in *d* schneidet, mit AC parallel, und es wird AL:LB = CL:L*d* seyn. Da nun auch AL:LB = CL:LD seyn soll: so müste CL:L*d* = CL:LD, also L*d* = LD seyn; welches nicht seyn kan.

206 §.

99 F. Wenn *AC, BD* die beyden parallelen Seiten eines Trapezii *ABDC* sind, und man halbirt die beyden andern Seiten *AB* und *CD* bey *E* und *F*: so ist *EF* die halbe Summe der parallelen Seiten *AC* und *BD*.

Beweis. Man halbire AC in G, BD in H, und ziehe EG, HF, imgleichen BC, welche EF in K schneidet. Nun ist einmahl EF # AC # BD (205 §). Ueberdem AE:EB = AG:GC, und DH:BH = DF:FC; also EG # BC # HF (204 §). Deswegen ist EK = GC, KF = BH, und EK + KF = EF = GC + BH = ½AC + ½BD = ½(AC + BD).

207 §.

100 F. Eine grade Linie *AD*, die den Winkel *BAC* im Dreyeck *ABC* halbirt, theilt die gegenüberstehende Seite so, daß die Theile *BD, DC* sich wie die anliegenden Seiten *AB, AC* verhalten.

Und umgekehrt: Wenn eine Seite *BC* des Dreyecks *ABC* in *D* so getheilt ist, daß die Stücke *BD, DC* sich wie die anliegenden Seiten

ten

ten *AB*, *AC* verhalten: so halbirt *AD* den gegenüberstehenden Winkel *BAC*.

Beweis. Man verlängere BA, eine von den Seiten, die den Winkel BAC einschliessen, bis E, und mache AE=AC, ziehe sodann CE. Dafern nun

1) BAD=DAC ist; so ist BAC=2BAD. Aber auch BAC=2E (55. 87 §). Also 2BAD=2E, und BAD=E; folglich AD ∦ CE (87 §) und BD: DC=BA:AE (203 §), oder BD:DC=BA:AC.

2) Wenn umgekehrt BD:DC=BA:AC, und also BD:DC=BA:AE ist: so ist AD ∦ EC (204 §) und BAD=E (84§). Aber E=½BAC (55. 87§). Also BAD=½BAC.

208 §.

Zu dreyen gegebenen graden Linien *a*, *b*, *c*, die vierte Proportionallinie zu finden. 101 F.

Aufl. Man verzeichne einen Winkel A von willkührlicher Größe. Auf dem einen Schenkel nehme man AB=*a*, und AC=*b*, auf dem andern Schenkel aber AD=*c*, ziehe BD, und durch C mit BD die Parallele CE, welche AD in E schneidet: so ist AE die gesuchte vierte Proportionallinie. Denn es ist AB:AC=AD:AE (203 §). Also auch *a*:*b*=*c*:AE.

Wenn *a*=1 ist: so hat man 1:*b*=*c*:AE, also AE=*b*×*c*=AC×AD, und wenn *b*=1 ist: so wird *a*:1=*c*:AE, folglich $AE = \frac{c}{a} = \frac{AD}{AB}$ (165. 166 §). So lassen sich also die Begriffe der Multiplication und Division auch in der Geometrie anwenden, wenn sie in der allgemeinen Bedeutung genommen

nommen werden, in welcher sie am angeführten Orte erkläret sind. Man kan also auch sagen: es sey $AE = \frac{b \times c}{a} = \frac{AC \times AD}{AB}$, weil die Regel des 175 § der Rech. im 199 § so allgemein erwiesen ist, daß sie diese Folge zuläst.

209 §.

102 F. Gradlinichte Figuren ABCDEF, *abcdef* heissen ähnliche Figuren, wenn bey einer gleichen Anzahl von Seiten, die Winkel A, B, C, u. s. f. den Winkeln *a*, *b*, *c* nach der Ordnung gleich, und die Seiten, welche die gleichen Winkel einschliessen, einander proportional sind. Diese Seiten nennt man die gleichnahmigten Seiten der Figuren. Man braucht dies Zeichen (∽) die Aehnlichkeit zwoer Figuren anzudeuten.

Figuren also, die auf einander passen, sind nicht allein gleiche; sondern auch ähnliche Figuren.

So sind auch zwo Figuren, die einer dritten ähnlich sind, einander selbst ähnlich. Denn jede zweene nach einander folgende Winkel der beyden ersten Figuren werden dem gleichnahmichten Winkel in der dritten, und die Verhältnisse zwoer gleichnahmichten Seiten der beyden ersten dem Verhältniß der gleichnahmichten Seiten in der dritten gleich seyn.

Alle reguläre Polygone, die gleichviel Seiten haben, sind ähnliche Polygone. Denn wenn *n* die Anzahl der Seiten ist: so ist jeder Winkel sowohl des einen, als des andern Polygons $= 2R - \frac{4R}{n}$ (140 §). Und weil die Seiten eines jeden Polygons alle unter sich gleich groß sind: so ergiebt sich von selbst,

selbst, daß auch die gleichnahmichten Seiten proportional seyn müssen.

210 §.

Gleichwinklichte Dreyecke *ABC*, *DEF* sind einander ähnlich. 103 F.

Beweis. Wenn B = E, A = D folglich C = F (87 §): so nehme man BG = EF, wo EF die Seite ist, die mit BC zwischen gleichen Winkeln liegt. Durch G ziehe man GH mit AC, und durch G die Linie GI mit AB parallel; so hat man BHG = A = D, und BGH = C = F (84 §). Also BH = DE, HG = DF (90 §) = AI (98 §). Ferner ist AB:BC = HB:BG (203 §) = DE:EF, und überdem AC:BC = AI:BG (203 §) = DF:EF. Demnach sind die Seiten proportional, welche die gleichen Winkel B = E und C = F einschliessen. Aber die beyden gefundenen Proportionen AB:BC = DE:EF, und AC:BC = DF:EF, oder BC:AC = EF:DF, geben die dritte AB:AC = DE:DF (171 §). Also sind auch die Seiten, welche den dritten gleichen Winkel einschliessen, proportional, und die Dreyecke ABC, DEF einander ähnlich (209 §).

211 §.

Wenn die Seiten eines Dreyecks *ABC* den Seiten eines andern *DEF* in eben der Ordnung proportional sind: so sind es ähnliche Dreyecke. 104 F.

Beweis. Wenn BC und EF ein paar gleichnahmichte Seiten sind: so nehme man BG = EF, und ziehe GH mit AC parallel: so wird GH die Seite AB irgendwo in H schneiden, und dann ist BGH = BCA, BHG = BAC; also werden die Dreyecke HBG

HBG, ABC einander ähnlich 210 §. Nun ist aber vermöge der Voraussetzung BA : BC = ED : EF, und BA : BC = BH : BG (210 §). Also BH : BG = ED : EF, und weil BG = EF gemacht ist: so wird BH = ED (162 §). Es ist ferner vorausgesetzt, daß BC : AC = EF : DF sey, und man hat überdem BC : AC = BG : HG (210 §). Also BG : HG = EF : ED, folglich auch HG = DF (162 §). Aus den dreyen Sätzen aber BG = EF, BH = DE, HG = DF, folgt es sey DEF = B, und DFE = BGH = C. Also EDF = A, und das Dreyeck DEF ∽ ABC (210 §).

212 §.

104 F. Dreyecke *ABC, DEF*, die einen gleichen Winkel haben *B* = *E*, sind ähnliche Dreyecke, dafern die Seiten, welche den gleichen Winkel einschliessen *AB, BC, DE, EF* einander proportional sind.

Beweis. Wofern BA : BC = ED : EF ist, und also BA, ED, imgleichen BC, EF gleichnahmichte Seiten sind: so schneide man auf BA das Stück BH = der gleichnahmichten Seite ED, und eben so auf BC das Stück BG = EF ab, und ziehe GH: so ist auch HG = DF, BHG = EDF, HGB = DFE (54 §). Ueberdem aber BA : BC = BH : BG, also HG ∥ AC (204 §), und EDF = BHG = A, F = HGB = C, folglich das Dreyeck DFE ∽ ABC (210 §).

213 §.

Dreyecke, die einen gleichen Winkel haben, und zwo proportionale Seiten, die den gleichen Winkel nicht einschliessen, sind einander ähnlich, wenn die dem gleichen Winkel gegen-

über-

überstehende Seite grösser ist, als die an demselben anliegende Seite.

Beweis. In den Dreyecken ABC, DEF sey B = E, und BA : AC = ED : DF, überdem AC > BA, also DF > ED (163 §). Man nehme BH = ED, und mache den Winkel BHG = A; so ist das Dreyeck BHG ∽ ABC (210 §) und BA : AC = BH : HG. Aber vermöge der Voraussetzung ist BA : AC = ED : DF, also auch BH : HG = ED : DF. Weil nun BH = ED: so ist HG = DF. Also der Winkel D = BHG (78 §) = A, und weil auch E = B: so ist das Dreyeck ABC ∽ DEF. 104 F.

214 §.

Eine Linie *AE* von der Spitze des rechten Winkels *A* im rechtwinklichten Dreyeck *ABD* auf die Hypothenuse *BD* senkrecht gezogen theilt das Dreyeck in zwo andre, die unter sich und auch dem ganzen ähnlich sind. 105 F.

Beweis. Die Dreyecke ABD und ABE sind gleichwinklicht, weil BAD = R = AEB, und B beyden Dreyecken gemein ist: also ist ABD ∽ ABE. So sind auch ABD, und ADE gleichwinklicht, weil BAD = R = AED, und D beyden Dreyecken gemein ist. Also ABD ∽ ADE (210 §). Also ist auch das Dreyeck ABE ∽ ADE (209 §).

Demnach ist die senkrechte Linie von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypothenuse eines rechtwinklichten Dreyecks zwischen den beyden Stücken, worin sie die Hypothenuse theilt, die mitlere Proportionallinie.

Wenn also im Kreise über einem Durchmesser BD eine senkrechte Linie EA stehet; die den Kreis in A trift:

trift: so ist diese zwischen den beyden zugehörigen Stücken des Durchmessers BE, ED, die mitlere Proportionallinie. Denn die Sehnen AB, AD (schliessen mit dem Durchmesser BD ein rechtwinklichtes Dreyeck ein, das bey A den rechten Winkel und BD zur Hypothenuse hat (123 §).

215

106 F. Zwo Secanten des Kreises, die sich irgendwo in *A* schneiden, werden vom Kreise so getheilt, daß die beyden Stücke der einen Secante zwischen beyder Durchschnittspunct *A* und den Durchschnittspuncten mit dem Kreise den ähnlichen beyden Stücken der andern umgekehrt proportional sind.

107 F. Und wenn eine Tangente eine Secante des Kreises irgendwo in *A* schneidet: so ist das Stück der Tangente, das zwischen *A* und dem Berührungspunct liegt, zwischen den beyden Stücken der Secante, die sich von *A* bis an den Kreis erstrecken, eine mitlere Proportionallinie.

Beweis. Es mag der Durchschnittspunct A innerhalb oder ausserhalb des Kreises fallen: so werden zwo grade Linien BE, und DC allemahl ein paar Dreyecke ABE, ADC geben, worin der Winkel EAB = DAC (27 §) und BCD = BED (123 §) ist. Also wird das Dreyeck ∽ ABE ADC (210 §), und AB : AD = AE : AC.

107 F. Wenn aber AF den Kreis in D berühret, und C schneidet; so ziehe man BD, CD. Nun ist CBD = A + ADB, und CDF = A + ACD (87 §). Aber CBD = CDF (135 §), also A + ADB = A + ACD,

und

und ADB = ACD. Den Winkel A haben die beyden Dreyecke DAC, und ADB gemein. Also ist das Dreyeck DAC ∽ ADB (210 §) und AC : AD = AD : AB.

216 §.

Zwischen zwoen gegebenen graden Linien *a*, *b*, eine mitlere Proportionallinie zu finden. 105 F.

I. Aufl. Man trage auf einer willkührlich gezogenen graden Linie BD zuerst BE = *a* auf, und addire dazu *b* (42 §) so, daß ED = *b*, und BD = *a* + *b* wird. Die Summe BD halbire man in C, und verzeichne aus C mit dem Halbmesser CB = CD = $\frac{1}{2}(a+b)$ einen Kreis. Durch E ziehe man eine grade Linie auf BD senkrecht. Diese wird den Kreis in A schneiden, und EA wird die gesuchte mitlere Proportionallinie seyn (214 §).

II. Aufl. Man kan auch so verfahren. Auf einer willkührlich gezogenen graden Linie AC nehme man AC = *a*, AB = *b*. Ueber BC = AC − AB = *a* − *b* setze man ein gleichschenklichtes Dreyeck BGC, und mit dem Halbmesser GB = GC verzeichne man aus dem Mittelpunct G einen Kreis: so wird A ausserhalb dieses Kreises fallen (77 §). Durch A ziehe man eine Tangente des Kreises AD (126 §): so wird AD die gesuchte mitlere Proportionallinie seyn (215 §). 107 F.

217 §.

Aehnlichliegende, oder auch gleichnahmichte Diagonalen sind in ähnlichen Figuren solche, die man in beyden Figuren zwischen den Spitzen gleichnahmichter Winkel ziehet.

Man verlangt, daß diese Diagonalen ganz innerhalb der Fläche der Figur liegen sollen (109 §), und

dies wird bey einer jeden Linie von einem Winkelpunct zum andern zutreffen, wenn die Figur lauter auswärtsgehende Winkel hat: nicht aber bey einer jeden solchen Linie, wenn unter den Winkeln der Figur auch einwärtsgehende vorkommen, wie in der 65 F. Eine grade Linie von C nach F gezogen würde hier nicht ganz in der Fläche der Figur ABCDEFGHI fallen.

Wenn die Figur lauter auswärtsgehende Winkel hat, wie in der 102 F.: so lassen sich die Diagonalen AC, AD, u. s. f. alle so ziehen, daß sie in der Spitze eines Winkels, wie A, zusammenstossen.

Wäre A ein einwärtsgehender Winkel, und die übrigen alle auswärtsgehende: so würde dies noch angehen. Aber, wenn mehr auswärtsgehende Winkel vorkommen, wie in der 108 F. so wird es nicht allemahl angehen.

Figuren von der letztern Art aber lassen sich allemahl in Figuren der erstern Art eintheilen, wenn man zwischen den Spitzen der auswärtsgehenden Winkel Diagonalen, wie DG, DK u. s. f. ziehet: da denn jede dieser Figuren für sich, wie vorhin, durch Diagonalen, die in der Spitze eines Winkels zusammenstossen, in Dreyecke getheilt werden kan.

Ein paar ähnliche Figuren mögen also zu der einen oder andern Art gehören: so kan man sie allemahl durch gleichnahmichte Diagonalen in ähnlichliegende Dreyecke eintheilen, das ist, in solche, die entweder zwischen gleichnahmichten Seiten und Diagonalen, oder auch zwischen dreyen gleichnahmichten Diagonalen liegen.

218 §.

Aehnlich liegende Dreyecke in ähnlichen Figuren sind ähnliche Dreyecke. 103 F.

Beweis 1) Wenn zwo Seiten solcher Dreyecke zugleich gleichnahmichte Seiten der ähnlichen Figuren sind, wie AB, *ab*, BC, *bc*, in den Dreyecken ABC, *abc*; so folgt die Aehnlichkeit der beyden Dreyecke aus dem 212 §. Denn es ist nun B = *b*, und AB : *ab* = BC : *bc*.

2) Rechnet man nun diese Dreyecke ABC, *abc*, von beyden Figuren ab: so bleiben ACDEF und *acdef* auch noch ähnliche Figuren. Denn es ist BCD = *bcd*, und BCA = *bca*, also BCD — BCA = *bcd* — *bca*, oder ACD = *acd*. Ueberdem ist auch AC : *ac* = BC : *bc* = CD : *cd*. Also sind auch ACD und *acd* ähnliche Dreyecke, und es sind ADEF, *adef* wieder ähnliche Figuren; und das Dreyeck ADE ∽ *ade*. So gilt der Schluß von jedem Dreyeck auf das nechstfolgende, und deswegen sind alle ähnlichliegende Dreyecke einander ähnlich.

Weil ähnliche Figuren die einwärtsgehende Winkel haben, wie ABCDEFGHIK und *abcdefghik* sich in Figuren der ersten Art durch ähnlichliegende Diagonalen eintheilen lassen (217 §): so wird der Satz auch von ähnlichen Figuren dieser Art gelten. 108 F.

In ähnlichen Figuren verhält sich also jedes Paar ähnlich liegender Diagonallinien, wie sich zwo gleichnahmichte Seiten der Figuren verhalten.

219 §.

Die ganzen Peripherien ähnlicher Figuren, verhalten sich wie jedes Paar gleichnahmichter Seiten, oder Diagonalen. 102 108 F.

Beweis. Man hat folgende Proportionen.

AB : *ab* = AB : *ab* = AC : *ac*
BC : *bc* = AB : *ab* = AC : *ac*
CD : *cd* = AB : *ab* = AC : *ac*
DE : *de* = AB : *ab* = AC : *ac*.

Also AB + BC + CD + DE : *ab* + *bc* + *cd* + *de* = AB : *ab* = AC : *ac*. Hieraus erhellet soviel, daß ein paar Stücke des Anfangs ähnlicher Figuren wie ABCDE, *abcde* sich wie AB : *ab*, oder AC : *ac* verhalten, wenn diese Stücke aus einer gleichen Anzahl nach einander folgender gleichnahmichter Seiten zusammengesetzt sind. Aber man sieht leicht, daß jedesmahl noch die beyden folgenden Seiten EF, *ef* zu den vorigen Summen addirt werden können, ohne daß sich das Verhältniß der Summen ändert. Dieserwegen gilt der Satz für die ganzen Peripherien ähnlicher Figuren.

110 Wenn AB, *ab* zwo Seiten zwoer ähnlichen regulären Polygone sind, und man ziehet die Halbmesser CA, CB, *ca*, *cb* der um sie beschriebenen Kreise: so ist das Dreyeck ABC ∽ *abc* (210 §), und AB : *ab* = CA : *ca*. Also verhalten sich die Peripherien solcher Polygone wie die Halbmesser, folglich auch wie die Durchmesser der um sie beschriebenen Kreise.

Sind EF, *ef* zwo Seiten ähnlicher regulärer Polygone, in welchen mit den Halbmessern CB, *cb* ein paar Kreise beschrieben sind, und man ziehet CE, CF, *ce*, *cf*: so ist das Dreyeck ECF ∽ *ecf*, und ECB ∽ *ecb*. Demnach hat man EF : *ef* = EC : *ec* = CB : *cb*, und dieserwegen verhalten sich die Peripherien ähnlicher regulärer Polygone, auch wie die Halbmesser oder Durchmesser der in ihnen beschriebenen Kreise.

220 §.

Zwo gradlinichte Figuren *ABCDEF*, *abcdef*, 102
die aus einer gleichen Anzahl ähnlicher Drey- 108
ecke, in einerley Ordnung so zusammengesetzt F.
sind, daß jedes Dreyeck wie *ABC*, *abc*, mit dem folgenden *ACD*, *acd* eine Seite *AC*, *ac* gemein hat; sind ähnliche Figuren.

Beweis. Alle Seiten der einen Figur werden den gleichnahmichten Seiten der andern proportional seyn. Auch die gleichnahmichten Winkel in den beyden Figuren werden gleich groß seyn; denn es sind entweder die gleichen Winkel der Dreyecke selbst, wie ABC, *abc*, oder die Summe zweener, oder mehrer solcher gleichen Winkel, wie BCD = BCA + ACD = *bca* + *acd* = *bcd*; oder auch in der 108 F. BCD = BCA + ACK + KCD = *bca* + *ack* + *kcd* = *bcd*. Also sind die Figuren einander ähnlich (209 §).

221 §.

Wenn eine Linie kleiner ist, als die Peripherie eines Kreises: so kan man im Kreise ein reguläres Polygon beschreiben, dessen Umfang gröſſer, als diese Linie ist.

Beweis. Es sey P des Kreises Umfang, und 109
eine Linie $L < P$. Wenn CF ein Halbmesser des F.
Kreises ist: so nehme man $L : P = CF : CG$, und es wird G ausser dem Kreise fallen. Durch G sey eine Tangente des Kreises GH gezogen, und auf der andern Seite vom Berührungspunct $HI = HG$ genommen. Man ziehe CI, welche den Umfang in K schneidet, und nehme n so groß, daß $\frac{1}{n} P < FK$ wird (139 §. Rech.), so ist der Umfang des Polygons,

welches n Seiten hat, größer als L. Denn man nehme $HA = HB = \frac{1}{2n} P$, so daß $AHB = \frac{1}{n}$ P wird, und die Sehne AB ist eine Seite des Polygons. Man ziehe den Halbmesser CA, welcher die Tangente in D schneidet: so wird $CD < CG$. Da aber $CA = CF$: so ist $\frac{CA}{CD} > \frac{CF}{CG}$ (149 §). Also auch $\frac{CA}{CD} > \frac{L}{P}$. Es ist aber $\frac{CA}{CD} = \frac{AB}{DE}$ (212 §) $= \frac{nAB}{nDE}$ (181 §). Also auch $\frac{nAB}{nDE} > \frac{L}{P}$, und nAB ist des in dem Kreise, nDE aber des um den Kreis beschriebenen Polygons Umfang, wenn n die Anzahl der Seiten ist. Ferner ist $P < nDE$, also $\frac{nAB}{P} > \frac{nAB}{nDE}$ (149 §); folglich $\frac{nAB}{P} > \frac{L}{P}$ und $nAB > L$, oder der Umfang des Polygons im Kreise größer, als die Linie L.

Der Unterschied des Umfangs eines solchen Polygons im Kreise, von dem Umfang des Kreises, kan also kleiner werden, als jede gegebene Linie.

222 §.

Wenn eine Linie größer ist, als die Peripherie eines Kreises: so kan man um den Kreis ein reguläres Polygon verzeichnen, dessen Umfang kleiner, als diese Linie ist.

Beweis. Es sey eine Linie λ größer, als P, wenn wiederum P die Peripherie des Kreises bedeutet. Auf dem Halbmesser CF nehme man nun das Verhältniß $CG:CF=\lambda:P$: so fällt wiederum G ausser dem Kreise, weil $\lambda \rhd P$, also $CG \rhd CF$ ist. Durch G ziehe man die Tangente GH, und nehme $HI=HG$, ziehe CI, welche die Peripherie des Kreises in K schneidet. Wenn man nun n so groß nimt, daß $\frac{1}{n}P \lhd FK$ wird: so ist der Umfang des Polygons kleiner, als λ, wenn es n Seiten hat. Denn es sey wiederum $HB=HA=\frac{1}{2n}P$, so daß $AB=\frac{1}{n}P$ wird. Man ziehe CA, CB, welche mit der Tangente in D, E zusammenstossen: so ist DE eine Seite des verlangten Polygons, so, wie AB die Seite des ähnlichen Polygons im Kreise ist. Es ist nemlich $CD \lhd CG$ (77 §) und $CA=CF$. Also $\frac{CD}{CA} \lhd \frac{CG}{CF}$ (183 §), also $\frac{CD}{CA} \lhd \frac{\lambda}{P}$. Da nun $\frac{CD}{CA}=\frac{DE}{AB}=\frac{nDE}{nAB}$: so ist $\frac{nDE}{nAB} \lhd \frac{\lambda}{P}$. Weil aber nDE der Umfang des äussern, und nAB der Umfang des innern Polygons ist: so ist $P \rhd nAB$ (183 §); folglich $\frac{nDE}{P} \lhd \frac{nDE}{nAB}$, also auch $\frac{nDE}{P} \lhd \frac{\lambda}{P}$, und $nDE \lhd \lambda$, oder der Umfang des äussern Polygons kleiner, als die Linie λ. 109 F.

Demnach kan auch der Unterschied des Umfangs eines solchen Polygons um den Kreis vom Umfang des Kreises, kleiner werden, als jede gegebene Linie.

223 §.

110 Die Durchmesser D, d zweener Kreise C, c, F. verhalten sich gegeneinander, wie ihre Peripherien P, p.

Beweis. Die vierte Proportionallinie zu D, P und d sey L so, daß $D : P = d : L$ ist, und überdem sey $L \lessdot p$. Man verzeichne im Kreise c ein Polygon, dessen Umfang $\pi > L$ (221 §) und im Kreise C ein ähnliches Polygon, dessen Umfang $= \pi$ ist: so hat man $\pi : D = \pi : d$ (219 §). Es ist aber vermöge der Voraussetzung $D : P = d : L$; also $\pi : P = \pi : L$ (107 §). Weil nun $\pi > L$: so müste $\pi > P$ seyn gegen den 138 §.

Die vierte Proportionallinie zu D, P, und d sey nun λ so, daß $D : P = d : \lambda$, und es sey $\lambda > p$. Man verzeichne um den Kreis c ein reguläres Polygon, dessen Umfang $q < \lambda$ (222 §) und um den Kreis C ein ähnliches Polygon, dessen Umfang Q ist: so hat man $Q : D = q : d$ (219 §). Es ist aber vermöge der Voraussetzung $D : P = d : \lambda$, also wäre $Q : P = q : \lambda$ (171 §). Aber es ist $q < \lambda$; also wären $Q \lessdot P$, gegen den 144 §.

Wenn demnach die vierte Proportionallinie zu D, P, und d, weder größer, noch kleiner, als p seyn kan: so ist $D : P = d : p$, oder $D : d = P : p$ (182 §).

224 §.

111 In gleichen Kreisen verhalten sich die Win-
112 Fkel am Mittelpunct ACD, ACB gegeneinander, wie

wie die Bogen *AD*, *AB*, zwischen ihren Schenkeln.

Beweis. Wenn die Bogen AB, AD ein gemeinschaftliches Maaß haben: so sey AE dieses gemeinschaftliche Maaß, und $AB = nAE$, $AD = mAE$: so wird sich AE von A nach B $n$mahl und von A nach D $m$mahl auftragen lassen. Wenn man nun von C nach allen Theilungspuncten die Halbmesser CE u. s. f. ziehet: so wird der Winkel $ACB = nACE$, und $ACD = mACE$ (118 §). Man hat also $AE = \frac{1}{m}AD$, und $ACE = \frac{1}{m}ACD$, folglich $AB = \frac{n}{m}AD$, und $ACB = \frac{n}{m}ACD$. Da nun $ACD : \frac{n}{m}ACD = AD : \frac{n}{m}AD$ (172 §): so ist auch $ACD : ACB = AD : AB$. III F.

Wenn aber die Bogen AB, AD kein gemeines Maaß haben, und man theilt den größern Bogen AD in so viele Theile, als man will, wovon jeder = AE sey: so wird B allemahl zwischen zweenen Theilungspuncten fallen so, daß wenn zwischen A und B sich n Theilungspuncte befinden, $nAE < AB$, und $(n+1)AE > AB$ ist. Ziehet man nun die Halbmesser CE u. s. f. nach allen Theilungspuncten, und B fällt zwischen den $n$ten und $(n+1)$ten Theilungspunct: so wird allemahl zugleich CB zwischen der $n$ten und $(n+1)$ten Theilungslinie fallen so, daß $nACE < ACB$, und $(n+1)ACE > ACB$ ist. Weil nun $AE = \frac{1}{m}AD$, und $ACE = \frac{1}{m}ACD$ ist: so

hat man allemahl zugleich $\frac{n}{m}$ ACD ≺ ACB, und $\frac{n+1}{m}$ ACD ≻ ACB, wenn $\frac{n}{m}$ AD ≺ AB, und $\frac{n+1}{m}$ AD ≻ AB ist. Deswegen ist auch in diesem Fall ACD : ACB = AD : AB (175 §).

Jeder Winkel also verhält sich zum rechten Winkel, wie der Bogen, den man mit beliebigem Halbmesser aus der Spitze, als dem Mittelpunct, zwischen seinen Schenkeln beschreibt, zum Quadranten der ganzen Peripherie, wovon dieser Bogen ein Stück ist.

In gleichen Kreisen werden sich also auch die Winkel an der Peripherie AGD, AFB verhalten, wie die Bogen AD, AB zwischen ihren Schenkeln. Denn es ist AD : AB = ACD : ACB = ½ ACD : ½ ACB (181 §) = AGD : AFB (122 §).

225 §.

113 F. Wenn in ungleichen Kreisen, deren Peripherie *p*, *P* sind, zweene Winkel am Mittelpunct *ACB*, *DEF* gleich groß sind: so sind die Bogen *AB*, *DF* zwischen ihren Schenkeln den zugehörigen Peripherien proportional.

Und umgekehrt: Wenn ein paar Bogen *AB*, *DF* ungleicher Kreise, sich wie ihre Peripherien verhalten: so sind die zugehörigen Winkel am Mittelpunct gleich groß.

Beweis. Man setze CG auf AC, und EH auf ED senkrecht: so ist AB : AG = ACB : ACG, und DF : DH = DEF : DEH (224 §). Weil nun ACG

= DEH

$=DEH$ (21 §) und vermöge der Voraussetzung $ACB = DEF$: so ist $DF:DH = ACB:ACG$, also $AB:AG = DF:DH$ (159 §) und $AB:4AG = DF:4DH$ (190 §), oder $AB:p = DF:P$, weil $4AG = p$, und $4DH = P$, oder auch $AB:DF = p:P$ (182 §).

Wenn umgekehrt $AB:p = DF:P$ ist: so sey AG ein Quadrant von p, DH ein Quadrant von P, und man ziehe CG, CH. Nun ist auch $AB:\frac{1}{4}p = DF:\frac{1}{4}P$ (190 §), oder $AB:AG = DF:DH$; ferner $AB:AG = ACB:ACG$, und $DF:DH = DEF:DEH$ (224 §). Also $ACB:ACG = DEF:DEH$. Da nun $ACG = R = DEH$ (116 §): so ist auch $ACB = DEF$.

226 §.

Es sind ABC, DEF ein paar krumme Linien, und 114
AG, DH ein paar grade Linien, welche die krummen 115
in den Puncten A und D berühren, so daß die Lage F.
oder Richtung der krummen Linie ABC in A mit der Lage von AG, und die Lage der krummen Linie DEF in D mit der Lage von DH übereinkomt: Ferner AB, DE ein paar den ganzen Linien ABC, DEF proportionale Stücken. Wenn nun die Tangenten BK und EL durch B und E gegen die vorigen AG, DH einerley Lage haben, und dies allemahl, wie groß oder klein auch AB, und DE genommen worden, daferne sie nur allemahl proportionale Theile der ganzen Linie ABC, DEF bleiben: so sind die **krummen Linien ABC, DEF einander ähnlich.**

Dies ist der Begriff der Aehnlichkeit des 209 §, 116
nur so verändert, wie es der Natur krummer Linien F.
gemäß ist. Eine gebrochne Linie ABCD, ist einer andern *abcd* ähnlich, wenn ihre graden Theile AB, *ab*, BC, *bc*, CD, *cd*, u. s. f. nach der Ordnung in ei-

nerley

nerley Verhältniß stehen, welches also mit dem Verhältnisse der ganzen Linien einerley ist, und die Winkel ABC, *abc*; BCD, *bcd* u. s. f. zwischen den proportionalen Theilen gleich groß sind. Das heißt mit andern Worten: Wenn dergleichen gebrochne Linien in proportionalen Entfernungen von ihren Anfangspuncten A, *a*, ihre vorige Lage oder Richtung gleichviel verändern: so sind sie einander ähnlich (die Entfernungen rechnet man hier in der gebrochnen Linie selbst von A nach B, ferner von A durch B nach C, von A durch B und C nach D u. s. f. so, daß hier das Wort Entfernung den Weg anzeigt, den ein Punct A nehmen muß, nach C oder D zu kommen, ohne aus der Linie ABCD herauszugehen.) Ihre erste Lage war AF, *af*. Diese ändern sie beyde in B, *b* so, daß AB : *ab* = ABCD : *abcd*. Ihre neue Lage BC, *bc*, macht mit der ersten den Winkel CBF = *cbf*. Diese Lage ändern sie abermahl in C, *c* so, daß die Linie ABC : Linie *abc* = ABCD : *abcd*, und die neue Lage macht mit der ersten den Winkel DEF = *def* u. s. f. Bey den krummen Linien ABC, DEF kömt die erste Lage in A und D mit der Lage der Tangenten überein, und in jedem folgenden Punct ist hier die Lage anders, als in dem vorhergehenden. Wenn demnach dergleichen krumme Linien in proportionalen Entfernungen von den Anfangspuncten ihre vorige Lage gleichviel verändern, das ist, wenn ihre Tangenten in proportionalen Entfernungen von den Anfangspuncten mit dem ersten Tangenten gleiche Winkel machen: so sind es **ähnliche Linien.**

227 §.

117 F. **Alle Kreise sind einander ähnlich, auch alle**

Kreis-

Kreisbogen, die ihren Peripherien proportional sind, ebenfalls ähnliche Bogen.

Auch umgekehrt: ähnliche Kreisbogen sind ihren Peripherien proportional.

Beweis. Wenn CA, ED ein paar Halbmesser zweener Kreise sind: so ziehe man durch A und D die Tangenten AM, DN. Man nehme ein paar Bogen AB, DF, die sich wie die ganzen Kreislinien verhalten, und ziehe durch B und F die Tangenten BG, FH: so ist der Winkel ACB = DEF (225 §). Also auch AGB = DHF, weil AGB + ACB = 2R = DHF + DEF (89 §) und BGM = FHN. Folglich sind die Kreise einander ähnlich.

Sind nun AK und DL ein paar Kreisbogen, die ihren Peripherien proportional sind, und man nimmt AB : DF = AK : DL d. i. AB : DF = p : P: so erhellet, wie vorhin, daß BGM allemahl = FHN sey, demnach sind AK, DL ähnliche Bogen.

Umgekehrt: Wenn AB, DF ähnliche Kreisbogen sind; so ist der Winkel BGM = FHN, also auch ACB = DEF, und AB : DF = p : P.

Also verhalten sich ähnliche Kreisbogen, wie die Durchmesser, oder Halbmesser ihrer Peripherien: auch verhalten sich ähnliche Kreisbogen, wie ihre Sehnen, und die zu ähnlichen Bogen gehörige Winkel am Mittelpunct sind gleich groß (225 §).

228 §.

Ausschnitte *ACBQ*, *DEFR*, und Abschnitte *AQB*, *DRF*, die zu ähnlichen Bogen gehören, sind ähnliche Figuren. 117 F.

Beweis. In den Ausschnitten sind die Winkel bey A und D, B und F, C und E gleich groß, und

AC:

AC : DE = BC : FE = Bog : AQB : Bog : DRF (227 §).

Der Abschnitte AQB, DRF Winkel bey A und D, B und F sind gleich. Denn CAB = EDF, und CBA = EFD, also BAG = FDH, GBA = HFD. Ueberdem der Bogen AQB : Bog. DRF = AB : DF (227 §).

229 §.

117 F. Aehnliche Abschnitte fassen gleiche Winkel (123 §) und wenn Abschnitte gleiche Winkel fassen: so sind es ähnliche Abschnitte.

Beweis. Die Winkel GAB, HDF, und GBA, HFD ähnlicher Abschnitte müssen gleich groß seyn (209 §). Also sind auch die Winkel in den Abschnitten gleich groß; denn sie sind jener Ergänzungen zu 2R (135 §). Umgekehrt also: Wenn die Abschnitte gleiche Winkel fassen: so ist GAB = HDF = GBA = HFD, also auch G = H (87 §), und ACB = DEF (89 §). Folglich ABQ ∽ DRF (225 §).

Der VIII. Abschnitt.

Von den zusammengesetzten Verhältnissen.

230 §.

Man kan ein paar Verhältnisse auf ähnliche Art mit einander vergleichen, wie oben im VI Abschnitt ein paar einzelne Größen mit einander verglichen wurden. Denn da ein Verhältniß größer, oder kleiner, als das andre seyn kan (160 §): so kan man

auch

auch fragen; wie groß denn ein Verhältniß gegen das andre sey, ob es nemlich noch mahl so groß, oder dreymahl so groß, oder so groß sey, u. s. f. als ein andres Verhältniß. Wenn man eine solche Vergleichung zwischen ein paar einzelnen Größen A und B anstellet: so prüfet man, ob entweder die eine A ganz; oder doch ein aliquoter Theil von ihr in der andern B etliche mahl enthalten sey. Eben so muß man bey Vergleichung der Verhältnisse verfahren. Aber man muß sich vor allen Dingen eine richtige Vorstellung davon machen, wie sich ein Verhältniß aus seinen Theilen zusammensetzen lasse. Jede einzelne Größe läst sich auf mannigfaltige Art in gleiche, oder ungleiche, viele, oder wenige Theile eintheilen, und es ist mit denen Verhältnissen nicht anders beschaffen. Man lernt sich in dieser Sache am besten finden, wenn man bis auf die ersten Begriffe von den Verhältnissen so, wie sie 151 § u. s. f. erklärt worden, zurücke gehet.

231 §.

Wer mir die Frage vorlegt: wie viel gilt ein Thaler? dem kan ich nicht anders antworten, wofern ich ihm nicht das Verhältniß des Thalers zu einer ihm schon bekannten Münze anzeige, und dies kan auf mannigfaltige Art geschehen. Ich kan den Thaler entweder mit der bekannten Münze unmittelbar, oder vermittelst mehrer andrer Münzen vergleichen. Wer es wissen will, wie viele Groschen auf einen Thaler gehen, dem kan ich kurz antworten: 24 Gr. machen einen Thaler. Und dies ist eben so viel gesagt, als wenn ich mich so ausdrückte: Thl: Gr. = 24:1. Eben dies Verhältniß des Thalers zum

Gro=

Groschen, liesse sich durch eine Art von Umweg auch so angeben: 3 Mark machen einen Thaler, und 8 Groschen ein Mark. Es folgt hieraus, wie man leicht siehet, daß 24 Groschen einen Thaler machen, und dies heist weitläuftiger eben das gesagt, was vorhin auf einmahl gesagt ward. In dieser Antwort liegen nun folgende zwo Proportionen:

Thal : Mark = 3 : 1.
Mark : Gr: = 8 : 1.

Demnach giebt diese Antwort zwo Verhältnissen an, die als Theile zusammen das Ganze 24 : 1 ausmachen.

232 §.

Dieser Gedanke läst sich nun ohne Schwierigkeit allgemeiner machen. Wenn man das Verhältniß einer Größe A zur zwoten B, und wiederum das Verhältniß der zwoten B zu einer dritten C angiebt: so giebt man zugleich das Verhältniß der ersten A zur dritten C an, und dies Verhältniß A : C, ist aus den beyden A : B, und B : C zusammengesetzt. Hätte man demnach ein paar Proportionen von dieser Art:

$$A : B = m : n$$
$$B : C = p : q.$$

so erhellet, daß man auch sagen könne, das Verhältniß A : C sey aus den beyden Verhältnissen $m : n$, und $p : q$ zusammengesetzt, weil das Verhältniß $m : n$ mit A : B, und $p : q$ mit B : C einerley ist. Also sind die Verhältnisse $m : n$, und $p : q$, oder A : B, und B : C, als Theile anzusehen, welche zusammen das ganze Verhältniß A : C ausmachen. Man pflegte dies so auszudrücken $A : C = \binom{m : n}{p : q}$.

Wenn

Wenn also Thl : Mark = 3 : 1
Mark : Gr: = 8 : 1
so ist Thl : Gr: = $\begin{pmatrix} 3 : 1 \\ 8 : 1 \end{pmatrix}$.

233 §.

Es ist hiebey vor allen Dingen anzumerken, daß auf die Größe der einzelnen Glieder der Verhältnisse hier gar nichts ankomme. Denn ein und eben dasselbe Verhältniß läst sich auf unzählig viele verschiedene Arten ausdrücken (188 §).

Wäre A:B = 4:5
B:C = 7:23
so wäre auch
A:B = 8:10
B:C = 21:69

und es wäre einerley, ob man sagte, das Verhältniß A:C sey zusammengesetzt aus den Verhältnissen 4:5, und 7:23, oder aus den Verhältnissen 8:10, und 21:69. Es ist hier die Rede blos von der Größe der Verhältnisse, und gar nicht von der Größe ihrer einzelnen Glieder.

234 §.

Wären beyde Verhältnisse A:B, und B:C gleich groß; wäre

A:B = m:n
B:C = m:n;

so bestünde das Verhältniß A:C aus zweenen gleich grossen Theilen, davon jeder = A:B, oder = m:n, oder = B:C ist. Demnach ist in diesem Fall das Verhältniß A:C doppelt so groß, als A:B, oder m:n, und A:B, oder m:n ist die Hälfte des Verhältnisses A:C. Es heist nun A:C das verdop-

pelte Verhältniß von $m:n$ (ratio duplicata ipsius $m:n$) und $m:n$ heist von $A:C$ die ratio subduplicata.

Man kan hier wie im 232 § schreiben; $A:C=\begin{pmatrix} m:n \\ m:n \end{pmatrix}$.

235 §.

In einer stetigen Proportion ist das Verhältniß des ersten Gliedes zum dritten doppelt so groß, als das Verhältniß des ersten zum zweyten.

Beweis. Es sey $A:B=B:C$, und $A:B=m:n$: so ist auch $B:C=m:n$ (159 §), also $A:C=\begin{pmatrix} m:n \\ m:n \end{pmatrix}$ (234 §).

236 §.

Das Verhältniß zwoer Quadrat-Zahlen gegen einander ist doppelt so groß, als das Verhältniß ihrer Wurzeln.

Beweis. Es ist $AA:BB=A:\frac{BB}{A}$ (183 §) und $A:B=B:\frac{BB}{A}$ (199 §). Also $A:\frac{BB}{A}=\begin{pmatrix} A:B \\ A:B \end{pmatrix}$ (235 §) und $AA:BB=\begin{pmatrix} A:B \\ A:B \end{pmatrix}$ (159 §).

Demnach ist das Verhältniß der Wurzeln halb so groß, als das Verhältniß ihrer Quadratzahlen.

237 §.

Bey dieser Art, die Verhältnisse zu vergleichen, muß man Verhältnisse und Quotienten nicht für einerley halten. Im VI Abschnitt konnte dies geschehen, weil daselbst die Untersuchung nur vornämlich darauf abzielte, Kennzeichen der Gleichheit der Verhält-

hältnisse festzusetzen. War $\frac{B}{A} = m$: so war A:B $= 1:m$, und man konnte immer ein Verhältniß statt des andern brauchen. Wäre nun $\frac{C}{A} = 2m$, und man wollte daraus schliessen, es sey das Verhältniß C:A doppelt so groß, als das Verhältniß B:A: so würde dies ein grosser Fehler seyn. Es ist z. E. $\frac{12}{4} = 3$, und $\frac{24}{4} = 6$. Also der Bruch oder Quotient $\frac{24}{4}$ doppelt so groß, als $\frac{12}{4}$. Aber dem ohnerachtet ist das Verhältniß 4:24 keinesweges doppelt so groß, als das Verhältniß 4:12. Man müste sonst zwischen 4 und 24 eine mittlere Zahl x setzen können so, daß das Verhältniß $4:x$ und $x:24$ dem Verhältniß 4:12 gleich wäre. Sollte aber $4:x = 4:12$ seyn: so wäre $x = 12$ (162 §). Aber es ist falsch, daß $4:12 = 12:24$ sey.

Es ist dies eine Erinnerung, die für Kenner unnöthig, für Anfänger aber um so nothwendiger ist, da einige unbestimte Redensarten, die hier in der Lehre von den Verhältnissen nicht ungewöhnlich sind, leicht zu Verwirrungen Gelegenheit geben können. Der Herr von Leibnitz hat eben dies schon erinnert, bey Gelegenheit einer Streitigkeit mit Joh. Bernoulli, die hier noch nicht erörtert werden kan, und der Hr. Hofrath Kästner macht im I Theil seiner Anfangsgründe der Mathem. im 1 § des VI Cap. eben diese Anmerkung. Man vergleiche auch hiemit aus Hausens Elementis Matheseos auf der 56 und 57 S. die 6 Def. mit der beygefügten Erläuterung.

238 §.

Alle Verwirrung aber wird bey dieser Sache leicht vermieden, wenn man folgendes merket. Es ist nicht ungewöhnlich zu sagen, daß der Exponent eines Verhältnisses B:A, die Größe dieses Verhältnisses ausdrücke, und wenn man die Sache genau ansiehet: so ist die Redensart zweydeutig. Sie kan einmahl so viel heissen: Der Exponent *m* drückt die Grösse des einen Gliedes *B* dieses Verhältnisses, gegen das andre *A* aus, und dies hat seine völlige Richtigkeit (153 §). Eben die Redensart könnte auch wohl so erkläret werden: Der Exponent *m* drücke die Größe des Verhältnisses *B*:*A* gegen ein andres Verhältniß aus, dessen Größe man als bekannt ansiehet. Und in diesem Verstande genommen ist der Satz keines Weges allgemein richtig. Wenn man frägt: wie groß ist eine einzelne Größe B gegen eine andre A: so ist dies ganz etwas anders, als wenn man so frägt: wie groß ist das Verhältniß B:A gegen ein andres bekanntes Verhältniß? Die Vergleichung der Exponenten der Verhältnisse, als einzelner Größen, mit einander ist also ganz etwas andres, als die Vergleichung der Verhältnisse untereinander selbst, wie solches die weitere Ausführung dieser Lehre mit mehrern ergeben wird.

239 §.

Die im 131 § als ein Exempel gebrauchte Frage: wie viele Groschen gehen auf einen Thaler? liesse sich auch so beantworten: $1\frac{1}{2}$ Gulden machen einen Thaler, ein Gulden giebt 2 Mark, und ein Mark giebt 8 Groschen. So unnöthig ein solcher Umweg in einem so bekannten Exempel scheinen möchte; so noth-

wendig

wendig sind oft noch größere Umwege, wenn man mit unbekannten Verhältnissen zu thun hat, deren Größe man erstlich suchen muß. Es liegen in dieser Antwort 3 Proportionen

Thl. : Guld. = $1\frac{1}{2} : 1$
Gulden : Mark = 2 : 1
Mark : Groschen = 8 : 1.

Dies ist noch immer eben so viel gesagt, als wenn man auf einmahl antwortete: 24 Gr. machen einen Thaler. Denn 8 Gr. zweymahl genommen geben 16 Gr. und 16 Gr. anderthalb mahl genommen geben 24 Gr. Man giebt aber nun drey Verhältnisse an, die als Theile zusammengenommen das Ganze Thl. : Gr. oder 24 : 1 ausmachen. Hätte man demnach überhaupt 3 Proportionen von dieser Art:

$A:B = m:n$
$B:C = p:q$
$C:D = r:s$

so wäre das Verhältniß A : D aus den dreyen A : B, B : C, C : D, oder $m:n$, $p:q$, $r:s$ als Theilen zusammengesetzt. Dies kan man kurz so ausdrücken:

$$A:B = \begin{pmatrix} m:n \\ p:q \\ r:s \end{pmatrix}.$$

240 §.

Es können die drey Theile, woraus das ganze Verhältniß bestehet, gleich groß seyn, wie wenn die 3 Proportionen diese wären:

$A:B = m:n$
$B:C = m:n$
$C:D = m:n$

In diesem Fall ist das Verhältniß A : D dreymahl so

groß, als A:B, oder $m:n$; und $m:n$, oder A:B ist $\frac{1}{3}$tel des Verhältnisses A:D. Es heist nun A:D die ratio triplicata von A:B oder $m:n$, und A:B oder $m:n$ die ratio subtriplicata, von A:D. Dies läst sich also auf die Art ausdrücken:

$$A:D = \begin{pmatrix} m:n \\ m:n \\ m:n \end{pmatrix}.$$

241 §.

Wenn vier Größen in einer stetigen Proportion sind: so ist das Verhältniß des ersten Gliedes zum vierten dreymahl so groß, als das Verhältniß des ersten Gliedes zum zweyten.

Beweis. Es sey $A:B=B:C=C:D$, und $A:B=m:n$: so ist auch

$B:C=m:n$

$C:D=m:n$ (159 §).

Demnach $A:D=\begin{pmatrix} m:n \\ m:n \\ m:n \end{pmatrix}$ (240 §).

oder $A:D=\begin{pmatrix} A:B \\ A:B \\ A:B \end{pmatrix}$.

242 §.

Das Verhältniß zwoer Cubikzahlen gegeneinander ist dreymahl so groß, als das Verhältniß ihrer Wurzeln.

Beweis. Es ist $A^3:B^3 = A: \frac{B^3}{A^2}$ (183 §)

und

und $A:B = B:\frac{B^2}{A} = \frac{B^2}{A} : \frac{B^3}{A^2}$ (199 §). Also

$A:\frac{B^3}{A^2} = \begin{pmatrix} A:B \\ A:B \\ A:B \end{pmatrix}$ (241 §), und $A^3:B^3 = \begin{pmatrix} A:B \\ A:B \\ A:B \end{pmatrix}$ (159 §).

Demnach ist das Verhältniß der Cubikwurzeln $\frac{1}{3}$ des Verhältnisses ihrer Würfel.

243 §.

Ein Verhältniß, das aus zwoen oder dreyen andern als Theilen zusammengesetzt worden, ist einerley mit dem Verhältniß der Producte der gleichnahmichten Glieder der Theile dieses Verhältnisses gegeneinander.

Beweis. Es sey $\alpha:\beta = A:B$,
und $\gamma:\delta = B:C$
so ist $A:C = \begin{pmatrix} \alpha:\beta \\ \gamma:\delta \end{pmatrix}$ (233 §). Aber $B = \frac{A\beta}{\alpha}$ (183 §), also wird $\gamma:\delta = \frac{A\beta}{\alpha} : C$, und $C = \frac{A\beta\delta}{\alpha.\gamma}$. Dies giebt $\frac{C}{A} = \frac{\beta\delta}{\alpha.\gamma}$, oder $A:C = \alpha.\gamma : \beta.\delta$.

Hätte man nun auffer den Proportionen

$\alpha:\beta = A:B$
$\gamma:\delta = B:C$
noch diese $\varepsilon:\xi = C:D$

so wäre $A:D = \begin{pmatrix} \alpha:\beta \\ \gamma:\delta \\ \varepsilon:\xi \end{pmatrix}$ (239 §). Aber $C = \frac{A.\beta.\delta}{\alpha.\gamma}$

$\frac{A.\beta.\delta}{\alpha.\gamma}$ (per dem.). Also auch $\varepsilon : \xi = \frac{A.\beta.\delta}{\alpha.\gamma} : D$,

und folglich $D = \frac{\alpha.\beta.\delta.\xi.}{\alpha.\gamma.\varepsilon}$ (183 §). Dies giebt

$\frac{D}{A} = \frac{\beta.\delta\xi}{\alpha.\gamma.\varepsilon}$, oder $A : D = \alpha.\gamma.\varepsilon : \beta.\delta.\xi.$

Verhältnisse also, die aus zweyen oder dreyen gleichen Verhältnissen zusammengesetzt worden, sind gleich groß (199 §).

Der IX. Abschnitt.

Von der Vergleichung des Flächen-Inhalts der Figuren.

244 §.

118 F. Dreyecke *ABC*, *DEF*, die gleich hoch sind, verhalten sich wie ihre Grundlinien *BC*, *EF*.

Beweis. Wenn BC die größere Grundlinie ist: so nehme man $BG = EF$, und ziehe AG: so ist das Dreyeck $ABG = DEF$ (106 §). Ist nun BH das gemeinschaftliche Maaß von BG und BC so, daß $BG = n.BH$, $BC = m.BH$, also $BH = \frac{1}{m} BC$ und $BG = \frac{n}{m} BC$ ist: so trage man BH auf BG n mahl auf (42 §) und ziehe die graden Linien AH u. s. f. nach allen

allen Theilungspuncten in BC. Hiedurch erhält Dreyecke, die alle = ABH sind. Auf ABG gehen so viele, als BG, und auf ABC so viele, als BC theile hat so, daß $ABH = \frac{1}{m} ABC$, und $ABG = \frac{n}{m}$ ABC wird. Weil nun $ABC : \frac{n}{m} ABC = BC : \frac{n}{m} BC$, und $\frac{n}{m} ABC = ABG = DEF$, $\frac{n}{m} BC = BG = EF$: so ist $ABC : DEF = BC : EF$.

Dafern BC und BG oder EF kein gemeinschaftliches Maaß haben: so mag man BC in so viele gleiche Theile, als man will, eintheilen, es wird allemahl G zwischen zween Theilungspuncten fallen. Wenn aber $BC = mBH$ ist, es mag m so groß seyn als man will, und G fällt zwischen den $n$ten, und $(n+1)$ten Theilungspunct: so wird auch AG zwischen der $n$ten und $(n+1)$ten Theilungspunct fallen. Man hat also allemahl zugleich $\frac{n}{m} ABC \lessdot ABG$ und $\frac{n+1}{m} ABC \gtrdot ABG$; wenn $\frac{n}{m} BC \lessdot BG$ und $\frac{n+1}{m} BC \gtrdot BG$ ist. Demnach ist auch in diesem Fall $ABC : ABG = BC : BG$, oder $ABC : DEF = BC : EF$ (175 §).

Gleich hohe Parallelogrammen verhalten sich also ebenfalls wie ihre Grundlinien: denn ein paar Dreyecke auf eben den Grundlinien von eben der Höhe sind ihre Hälften (181 §).

245 §.

119 Dreyecke *ABC*, *DEF*, die gleiche Grundli-
F. nien haben, verhalten sich wie ihre Höhen.

Beweis. Des Dreyecks ABC Höhe sey CG, und FH des Dreyecks DEF Höhe. Man ziehe BG, EH: so sind BGC, HEF rechtwinklichte Dreyecke, und wenn CG, FH für ihre Grundlinie genommen werden: so sind BC, EF ihre Höhen (104 §). Da nun BC = EF: so ist GBC:HEF = GC:HF (244 §). Aber GBC = ABC, und HEF = DEF (106 §), also auch ABC:DEF = GC:HF.

Also verhalten sich auch Parallelogramme auf gleichen Grundlinien, wie ihre Höhen.

246 §.

120 Das Verhältniß zweyer Dreyecke oder Pa-
F. rallelogrammen gegen einander, ist aus dem Verhältniß ihrer Grundlinien zusammengesetzt.

Beweis. Wenn GB des Dreyecks ABC Höhe und DH des Dreyecks DEF Höhe ist: so nehme man BK = DH, und ziehe KC. Nun ist ABC:KBC = GB:KB (245 §), und KBC:DEF = BC:EF; also $ABC:DEF = \begin{pmatrix} GB:KB \\ BC:EF \end{pmatrix}$ (233 §).

Wenn man nun auf jeder Grundlinie BC, EF zweyer Parallelogrammen LC, EM, denen die Höhen BG, DH zugehören in gleicher Höhe mit dem Parallelogramm LC das Dreyeck ABC, und in gleicher Höhe mit dem andern EM das Dreyeck DEF setzt: so ist ABC = ½ LC, und DEF = ½ EM (106 §).

Also $LC:EM = ABC:DEF$ (181 §) $= \begin{pmatrix} GB:KB \\ BC:EF \end{pmatrix}$

247 §.

247 §.

Ist L die Seite eines Quadrats Q: so ist sowohl die Grundlinie, als auch die Höhe desselben = L (104 §). Wenn also eines andern Quadrats q, Seite = l ist: so hat man $Q:q=\binom{L:l}{L:l}$. Also ist das Verhältniß zweyer Quadrate das doppelte Verhältniß ihrer Seiten.

Wenn die Höhen zweyer Dreyecke oder Parallelogrammen sich wie die Grundlinie verhalten: so ist das Verhältniß derselben ebenfalls das verdoppelte Verhältniß der Grundlinien oder Höhen. Ein paar Quadrate, welche dieselben Grundlinien oder Höhen hätten, würden sich eben so verhalten. Also kan man sagen: Dreyecke, oder Parallelogrammen verhalten sich, wie die Quadrate ihrer Grundlinien oder Höhen, wenn das Verhältniß ihrer Grundlinien mit dem Verhältniß ihrer Höhen einerley ist.

248 §.

Weil $ABC:DEF=LC:EM=\binom{BG:DH}{BC:EF}=$ $BG\times BC:DH\times EF$ (243 §). So verhalten sich Dreyecke und Parallelogrammen auch, wie die Producte aus ihren Grundlinien und Höhen.

Dafern nun $BC:EF=DH:BG$ ist: so hat man $BG\times BC=DH\times EF$. Wenn also die Grundlinien sich umgekehrt, wie die Höhen verhalten: so sind die Dreyecke oder Parallelogrammen gleich.

Und wenn die Seite eines Quadrats zwischen den beyden Seiten eines Rechtecks, die mitlere Proportionallinie ist: so ist das Quadrat dem Rechteck gleich.

Um-

Umgekehrt: Wenn die Dreyecke, oder Parallelogrammen gleich sind: so verhalten sich die Grundlinien umgekehrt, wie die Höhen. Denn nun ist BG × BC = DH × EF. Also BC : EF = DH : BG (199 §).

Und wenn ein Quadrat einem Rechteck gleich *ist*: so ist die Seite desselben zwischen den Seiten des Rechtecks die mitlere Proportionallinie.

Auf diese Vergleichung der Rechtecke unter sich und mit den Quadraten, gründet sich eine Art die Rechtecke zu bezeichnen, wenn ihre Seiten gegeben sind, ohne daß man nöthig hat das Rechteck in der Figur würklich zu zeichnen. Sind *a* und *b* die zwo Seiten desselben: so schreibt man es so $a \times b$. Denn wenn *c* und *d* zwo Seiten eines andern Rechtecks sind, das man eben so bezeichnet $c \times d$: so ist es gleichviel, ob man das Verhältniß der Rechtecke selbst, oder das Verhältniß der Producte $a \times b$, $c \times d$ braucht, weil beyde Verhältnisse gleich sind.

249 §.

121 F. Wenn zwey Parallelogrammen BD, FM, oder Dreyecke ABC, EFG, einen gleichen Winkel haben B = F, und die Seiten, welche diesen gleichen Winkel einschliessen, sind einander umgekehrt proportional: so sind die Dreyecke, oder Parallelogrammen gleich groß, und umgekehrt: Wenn bey der Gleichheit eines Winkels B = F diese Figuren gleich sind: so sind die Seiten an dem gleichen Winkel einander umgekehrt proportional. Denn wenn AK, EL die Höhen dieser Figuren sind: so ist das Dreyeck ABK ∽ EFL, und EF : AB = EL : AK. Ist also BC : FG = EF : AB : so ist auch BC : FG = EL : AK; also ABC = EFG,

EFG, und BD = FH (248 §). Wenn aber diese letzte Gleichheit vorausgesetzt wird: so folgen jene Proportionen rückwärts.

250 §.

Wenn in ähnlichen Dreyecken *ABC*, *DEF* zwo gleichnahmichte Seiten *BC*, *EF* für die Grundlinien genommen werden: so verhalten sich die Höhen *AM*, *DN* wie die Grundlinien. 103 F.

Beweis. Es ist ABM ∽ DEN (220 §). Also AM : DN = AB : DE, und AB : DE = BC : EF. Folglich auch AM : DN = BC : EF.

Also verhalten sich ähnliche Dreyecke wie die Quadrate ihrer gleichnahmichten Seiten (247 §).

251 §.

Alle ähnliche gradlinichte Figuren verhalten sich wie die Quadrate ihrer gleichnahmichten Seiten oder Diagonalen. 102 F. 108 F.

Beweis. Wenn man die Figuren nach dem 217 § in ähnlichliegende Dreyecke eintheilt: so ist das Verhältniß von jedem Paar solcher ähnlichliegender Dreyecke = $AB^q : ab^q = AC^q : ac^q$ u. s. f. Also ist das Verhältniß der Summe aller Dreyecke in der einen Figur zur Summe aller Dreyecke in der andern, oder das Verhältniß der einen ganzen Figur gegen die andre eben so groß (191 §).

Die Seiten zweyer ähnlichen regulären Polygone sind Sehnen ähnlicher Kreisbogen, die sich wie die Halbmesser der Kreise um die Polygone, auch wie die Halbmesser, der in denselben beschriebenen Kreise, verhalten (227 §). Also ist das Verhältniß der Polygone, dem Verhältniß der Quadrate der Halbmes-

ser

ser oder Durchmesser, um oder in demselben beschriebener Kreise, gleich.

252 §.

122 Wenn zwischen den Schenkeln ungleicher
123 Winkel *ACB*, *DEF* aus den Spitzen C und *E*
F. mit ungleichen Halbmessern *CA*, *ED*, die Bogen *AB*, *DF* beschrieben sind: so ist das Verhältniß der Winkel *ACB*, *DEF* aus den beyden Verhältnissen der Bogen *AB*, *DF*, und der zugehörigen Halbmesser verkehrt genommen *ED*, *CA*, zusammengesetzt.

Beweis. Man nehme den Winkel ACG=R =DEH; so sind AG, DH Quadranten, die zu den Peripherien *p*, P, gehören. Nun ist ACB:R= AB:$\frac{1}{4}p$, und R:DEF=$\frac{1}{4}$P:DF. Also hat man

$$ACB:DEF = \binom{AB:\frac{1}{4}p}{\frac{1}{4}P:DF}\ (233\,\S) = \tfrac{1}{4}P \times AB:\tfrac{1}{4}p \times DF\ (243\,\S) = P \times AB:p \times DF\ (181\,\S),$$ oder

$$ACB:DEF = \binom{AB:DF}{P:p}\ (233\,\S).$$ Weil nun P:*p*= ED:CA (223 §): so ist auch ABC:DEF= $\binom{AB:DF}{ED:CA}$.

253 §.

Ausschnitte gleicher Kreise verhalten sich wie die ihnen zugehörigen Bogen, oder auch wie ihre Winkel am Mittelpunct.

111 Beweis. Wenn man im 224 § statt der Win-
112 kel am Mittelpunct ACB, ACD die Ausschnitte
F. ACBE, ACDE verstehet, und auf diese die Schlüsse des Beweises eben so anwendet, wie sie dort auf die Winkel am Mittelpunct angewandt wurden: so erhellet daraus zugleich die Richtigkeit der Proportion ACDE:ACBE=AD:AB. Und weil auch der Win-

kel

kel ACD: Wink. ACB = AD: AB: so ist zugleich ACDE: ACBE = Wink. ACD: Wink. ACB.

Jeder Ausschnitt verhält sich also zur Kreisfläche, wie der Bogen des Ausschnitts zur ganzen Peripherie. Denn wenn in der 111 F. ACD ein rechter Winkel ist: so ist ACDE ein Quadrant der Kreisfläche. Aber alsdenn ist ACBE: ACDE = AB: AD, und ACBE: 4 ACDE = AB: 4 AD (190 §). Da dann 4 ACDE die ganze Kreisfläche, und 4 AD die Peripherie ist. 111 F.

254 §.

Ein Kreis-Ausschnitt *ACBD* ist einem Dreyeck *EFH* gleich, dessen Grundlinie *FH* so groß als der Bogen *ADB*, und dessen Höhe *EF* so groß, als der Halbmesser *AC* des Ausschnitts ist. 124 F.

Beweis. Man setze es sey FG der Peripherie P des Kreises gleich, wozu der Ausschnitt gehöret: so ist die Kreisfläche, wozu der Ausschnitt gehöret, dem Dreyecke EFG gleich (150 §). Diese Kreisfläche sey = C: so hat man zwo Proportionen ACBD: C = ADB: P = FH: FG (253 §) und EFH: EFG = FH: FG (244 §). Diese geben die dritte ACBD: C = EFH: EFG. Da nun C = EFG: so ist auch ACBD = EFH (162 §).

255 §.

Kreisflächen, ähnliche Kreisausschnitte, und ähnliche Kreisabschnitte verhalten sich wie die Quadrate der zugehörigen Halbmesser oder Durchmesser.

Das Verhältniß der Abschnitte ist auch gleich dem Verhältniß der Quadrate ihrer Sehnen.

Beweis.

124 **Beweis.** Der einen Kreisfläche C Peripherie
125 sey P, der andern Kreisfläche *c* Peripherie sey *p*.
F. Man verzeichne zwo Dreyecke EFG, *efg* und mache die Grundlinie FG = P, *fg* = *p*. Die Höhen EF = AC, *ef* = *ac*; so hat hat man P : *p* = AC : *ac* (223 §). Also FG : *fg* = EF : *ef*. Demnach ist EFG : *efg* = EFq : *efq* (247 §) = ACq : *acq*. Da aber EFG = C, und *efg* = *c*: so ist auch C : *c* = ACq : *acq*.

Wenn der Bogen ADB ∽ *adb*, und man macht FH = ADB, und *fh* = *adb*: so ist wiederum ADB : *adb* = AC : *ac* (227 §). Also FH : *fh* = EF : *ef*, und EFH : *efh* = EFq : *efq* = ACq : *acq* (247 §). Da nun EFH = ACDB, und *efh* = *acdb* (254 §): so ist auch ACDB : *acdb* = ACq : *acq*.

Man ziehe nun die Sehnen AB, und *ab*; so ist der Winkel ACB = *acb* (227 §) und AC : *ac* = BC : *bc* (158 §). Also das Dreyeck ACB ∽ *acb* (212 §) und ACB : *acb* = ACq : *acq* (250 §). Aber auch ACDB : *acdb* = ACq : *acq*. Also ACDB — ACB : *acdb* — *acb* = ACq : *acq* (180 §). Oder der Abschnitt ADB : Abſch. *adb* = ACq : *acq*.

Das Verhältniß der Quadrate der Durchmesser ist mit dem Verhältniß der Quadrate der Halbmesser einerley, weil das verdoppelte Verhältniß der Halbmesser und Durchmesser einerley ist (243 §). Auch ist das Verhältniß der Halbmesser mit dem Verhältniß der Sehnen ähnlicher Bogen einerley; also ist auch das Verhältniß ähnlicher Abschnitte einerley mit dem Verhältniß der Quadrate ihrer Sehnen.

256 §.

Eine Figur quadriren heist ein Quadrat verzeichnen, das der gegebenen Figur gleich ist.

Wenn

Wenn ein Rechteck gegeben ist: so sucht man nach dem 216 §. zwischen den Seiten desselben eine mittlere Proportionallinie. Diese ist die Seite des dem Rechteck gleichen Quadrats (248 §).

Ist die gegebene Figur ein schiefwinklichtes Parallelogramm, oder ein Dreyeck: so sucht man nach dem 105, oder 107 §. ein eben so großes Rechteck, und quadrirt dieses, wie vorhin gewiesen ist.

Stat eines gegebenen regulären Polygons quadrirt man, wie vorhin, das demselben gleiche Dreyeck (143 §).

Ist eine irreguläre gradlinichte Figur gegeben: so sucht man nach dem 110 §. ein eben so großes Rechteck, welches sich sodann stat der Figur quadriren läst.

Vorausgesetzt, daß man eine grade Linie finden könne, die dem Umfang eines Kreises gleich ist, läst sich auch der Kreis, oder ein Abschnitt, oder Ausschnitt des Kreises quadriren; wenn das Verhältniß des dem Abschnitt, oder Ausschnitt zugehörigen Bogens zur Peripherie durch ein Verhältniß zwoer graden Linien gegeben ist. Man müste nach dem 150 §. ein der ganzen Kreisfläche, und nach dem 254 §. ein dem Ausschnitte gleiches Dreyeck suchen, welches sich dann stat des Kreises, oder des Ausschnitts quadriren liesse. Von der Quadratur des Ausschnitts hinge dann zugleich die Quadratur des Abschnitts zwischen dem zugehörigen Bogen, und der Sehne ab. Denn diese Sehne schneidet ein Dreyeck ab, und man könte nun die Differenz der dem Ausschnitt und dem Abschnitt gleichen Quadrate nach dem 113 §. suchen.

257 §.

126 F. Den Durchmesser eines Kreises zu finden, der so groß ist, als die Summe zweener andern Kreise C, c, deren Durchmesser AB, AC gegeben sind.

Aufl. Man verzeichne einen rechten Winkel BAC, und mache seine Schenkel AB, AC so groß, als die Durchmesser der gegebenen Kreise: so ist die Hypothenuse BC des rechtwinklichten Dreyecks ABC, der Durchmesser des gesuchten Kreises.

Beweis. Der Kreis, dessen Durchmesser die Hypothenuse ist, heisse K: so ist $AB^q : AC^q = C : c$ (255 §). Also $AB^q + AC^q : AC^q = C + c : c$ (189 §), oder $BC^q : AC^q = C + c : c$ (111 §). Ferner ist $BC^q : AC^q = K : c$ (255 §). Also $K : c = C + c : c$, und $K = C + c$ (162 §).

Wolte man also den Durchmesser eines Kreises C haben, welcher so groß seyn sollte, als die Differenz eines größern Kreises K von einem kleinern c: so müste man auf dem einen Schenkel des rechten Winkels den Durchmesser AC des kleinern Kreises nehmen, und mit dem Durchmesser CB des größern K einen Kreis beschreiben, der den andern Schenkel in B schnitte. Nun müste AB der Durchmesser des gesuchten Kreises seyn. Denn ist C der diesem Durchmesser zugehörige Kreis: so ist vermöge des Beweises $K = C + c$ also $K - c = C$.

Dieser Beweis gründet sich, auf den Pythagorischen Lehrsatz, und auf die Eigenschaft der Kreise, daß ihr Verhältniß gegen einander, mit dem Verhältniß der Quadrate ihrer Durchmesser einerley ist. Weil dies nun eine allgemeine Eigenschaft aller Figuren ist, daß sie sich, wie die Quadrate, ihrer gleichnahmichten Seiten oder Diagonalen verhalten: so wird der Satz

mit

mit gehöriger Veränderung von allen ähnlichen Figuren gelten, wenn stat der Durchmesser der Kreise gleichnahmichte Seiten oder Diagonalen ähnlicher Figuren, auch die Sehnen ähnlicher Kreis-Abschnitte verstanden werden.

Wenn nemlich die Summe der Quadrate zwoer solcher gleichnahmichten Linien in zwoen ähnlichen Figuren so groß ist, als das Quadrat einer gleichnahmichten Linie einer ähnlichen dritten Figur: so ist diese dritte Figur so groß, als die Summe der beyden vorigen.

258 §.

Vermöge des vorigen Satzes ist in der 126 Fig. die halbe Kreisfläche CAB der Summe der beyden halben Kreisflächen BDA + AEC gleich. Wenn nun von dem Halbkreis BAC die beyden Abschnitte AGB und AHC abgehen: so bleibt das Dreyeck ABC übrig, und wenn von den beyden Halbkreisen ADB, AEC eben die Abschnitte AGB, AHC abgehen, so bleiben die beyden Figuren ADBG, und AECH übrig. Beyde zusammen sind also dem gradlinichten Dreyeck ABC gleich, oder einem der Dreyecke AKB, AKC, wenn AB = AC, und AK eine senkrechte Linie auf BC ist. Diese Figuren ADBG, AECH, werden von ihrer Gestalt Möndchen (lunulae) genant. Man kan sie quadriren, weil man die ihnen gleichen Dreyecke quadriren kan (256 §). Sie werden von dem Erfinder dieser Quadratur, Möndchen des Hippocrates, (lunulae Hippocratis) genannt. Aber dergleichen besondre Quadraturen solcher Figuren, die von Kreisbogen eingeschlossen sind, haben in der Ausübung eben keinen Nutzen. 126 F.

Anwendung der Rechenkunst

auf die ebene Geometrie.

Der X. Abschnitt.

Von der Ausmessung grader Linien und Winkel.

259 §.

Bey allen Messungen nimt man eine gewisse Größe, die mit demjenigen, was man rechnen will, von einerley Art ist, als bekannt an. Diese Größe heist das Maaß, und sie ist nichts anders, als die Einheit, womit man die auszumessende Größe vergleicht, um das Verhältniß einer solchen Größe gegen diese Einheit durch eine Zahl auszudrücken. Ein jedes Maaß ist an sich willkührlich. Inzwischen hat man nun allenthalben eingeführte bestimte Maaße, und das Maaß ist bey jeder Messung eine gegebene Größe.

260 §.

Bey Ausmessung grader Linien muß also eine bestimte Länge für das Maaß angenommen werden, und es ist fast durchgängig eingeführt, ohngefähr die Länge des Fußes eines erwachsenen Menschen dafür anzunehmen, daher man auch dieses Maaß einen Fuß nennet. Eine Länge von zehn Füßen heist eine Ruthe, der zehnte Theil des Fußes ein Zoll, der zehnte Theil eines Zolls eine Linie, und der zehnte

Theil

Theil einer Linie ein Scrupel. Diese Eintheilung aber ist nur bey den Geometern gewöhnlich, und dies deswegen, weil auf solche Art die kleinern Theile des Maaßes durch Decimal-Brüche ausgedrückt werden. Dies erleichtert die Rechnung sehr, nicht allein, wenn man genante Zahlen von dieser Art auf andere Namen bringen soll (146. 147 §. Rech.), sondern auch in allen übrigen Fällen, wenn man mit solchen genannten Zahlen die vier Rechnungs-Arten vornehmen soll, wie der VIIIte Abschnitt der Rechenkunst zur Genüge zeiget.

261 §.

Es ist sonst im gemeinen Leben mehr gewöhnlich, den Fuß in 12 Zolle, den Zoll in 12 Linien u. s. f. zu theilen, da dann 12 Fuß, wiewol auch an manchen Orten 15, auch 16 Fuß, eine Ruthe machen. Auf einen Klafter, einen Faden, eine Lochter werden 6 Fuß gerechnet. Man kan das geometrische Maaß mit seiner Eintheilung, das Decimal-Maaß, das gemeine aber, wenn Ruthen, Fuße u. s. f. allemal in 12 Theile getheilet werden, das Duodecimal-Maaß nennen.

262 §.

Hat man beym Geometrischen Messen eben den Fuß, oder eben die Ruthe gebraucht, die sonst nach gemeiner Art in zwölf Theile getheilt wird; so kan man die Zahlen, welche Decimal-Maaß ausdrücken, leicht auf Duodecimal-Maaß bringen, und umgekehrt, wenn man nach dem 148 §. der Rechenkunst verfährt. Man muß aber vorläufig diese Sätze merken, die aus beyden Arten der Eintheilung folgen.

Eine Decimal-Ruthe hat 10 Fuß, 100 Zoll, 1000 Linien, 10000 Scrupel.

Ein Decimal-Fuß hat 10 Zoll, 100 Linien 1000 Scrupel.

Ein Decimalzoll hat 10 Linien, 100 Scrupel.

Eine Duodecimal-Ruthe hat 12 Fuß, 144 Zoll, 1728 Linien, 20736 Scrupel.

Ein Duodecimal-Fuß hat 12 Zoll, 144 Linien, 1728 Scrupel.

Ein Duodecimal-Zoll hat 12 Linien, 144 Scrupel. Frägt man nun: 3 Zoll 6 Linien Decimal-Maaß, wie viel sind es Linien in eben dem Maaß nach der Duodecimal-Eintheilung? so ist die Antwort: $\frac{36}{100}$ Duodecimal-Fußes $= \frac{36}{100}$ 144 Linien $= 51,84$ Linien, oder fast 52 Lin. Hiebey wird vorausgesetzt, daß der gebrauchte Fuß derselbe sey. Wäre aber die Ruthe schon in 10 Fuße getheilt worden: so wären diese 3 Zoll, 6 Linien Decimalmaaß $= \frac{36}{1000}$ Duodecimalruthe $= \frac{36}{1000}$ 1728 Duodecimal-Lin. $= 62,408$, oder fast $62\frac{1}{2}$ Duodecimal-Linien.

263 §.

In der Theorie nimt man es als eine mögliche Voraussetzung an, daß es allemal angehe, eine grade Linie, vermittelst eines gegebenen Maaßstabes, zu messen. In der Ausübung hat dies ziemliche Schwierigkeiten, davon aber hier noch nichts gesaget werden kan. Bey graden Linien, die auf dem Papier gezeichnet sind, läst sich die Sache leicht, vermittelst des Circul-Instruments, bewerkstelligen, wenn der Maaßstab gegeben, oder willkührlich angenommen ist. Das letzte ist hier allemahl erlaubt; denn an sich ist es ganz willkührlich, welche Linie man

eine

eine Ruthe, einen Fuß, nennen will. Man nimt hier gewöhnlich eine sehr kleine Linie für eine Ruthe an, und theilt diese übrigens eben so in Füße, Zolle u. s. f., wie es im großen gewöhnlich ist. Ein solches verkleinertes Maaß pfleget man auch ein verjüngtes Maaß zu nennen.

264 §.

Man ziehe also eine grade Linie AB, trage auf derselben von A nach B hin 10 kleine Theile bis G: so wird AG = 10 Ruthen. Nun fasse man die Linie AG, und trage sie weiter von G nach H, von H nach B u. s. f. so weit man Platz hat, oder es für nöthig findet: so wird jede Abtheilung, wie GH = HB u. s. f. 10 Ruthen lang. Wenn man nun in B zu zählen anfangen will: so setze man in B die 0, bey H setze man 10: so komt 20 bey G, 30 bey A, u. s. f. wenn man mehr Abtheilungen, wie AG aufgetragen hätte: Bey den kleinern Abtheilungen in GA setze man nun von G nach A, weil man nach dieser Richtung zählt, die Ziffern 1, 2 u. s. f. bis 10: so hat man einen verjüngten Maaßstab, den man bey Zeichnungen auf dem Papier gebrauchen kan. Die kleinen Theile, welche hier Ruthen bedeuten sollen, lassen sich nun nicht füglich mehr in 10 gleiche Theile, oder Füße so unmittelbar theilen. In dieser Absicht hat man verschiedene Vortheile ersonnen, die Maaßstäbe so einzutheilen, daß man auch ungemein kleine Theile sehr genau haben kan, und diese sollen in den folgenden Theilen, welche die ausübende Mathematik vortragen, näher beschrieben werden. 127 F.

265 §.

Eine grade Linie *CD* auf dem Papier zu messen, wenn der Maaßstab *AB* gegeben ist. 127 F.

Aufl. Man fasse CD zwischen den Spitzen des Circul-Instruments, setze die eine Spitze in einem der Haupttheilungs-Puncte, wie H oder B. Fällt nun die andere Spitze noch über A hinaus: so gehe man so lange nach B zurück, bis diese andre Spitze entweder in A selbst, oder zwischen A und G fällt. Trift sie nun auch einen Theilungspunct zwischen A und G: so zählt man die Anzahl der Ruthen von der einen Spitze zur andern. Fällt aber die zwote Spitze zwischen zweenen Theilungs-Puncten: so muß man nach dem Augenmaaße bey dieser Einrichtung des Maaßstabes nur schätzen, ob noch etwa $\frac{1}{4}$, oder $\frac{1}{2}$, oder $\frac{3}{4}$ einer Ruthe zu der ganzen Anzahl von Ruthen zu setzen sey, die zwischen den Spitzen fallen. Wenn man in der 127 Fig. die Linie CD zwischen dem Circul-Instrument fast, und die eine Spitze in B setzt: so wird die andre dahin fallen, wo der Bogen EF mit dem Halbmesser CD beschrieben diese Linie schneidet. Dies erfolgt hier zwischen 27 und 28 Ruthen, und CD ist etwa $27\frac{1}{4}$ Ruthe, oder 27 Ruthen, 2 Fuß, 5 Zoll lang.

Ist die gegebene Linie länger, als der Maaßstab gezeichnet ist: so kan man sie in Theile eintheilen, und jeden Theil, wie vorhin, messen: oder man kan den ganzen Maaßstab so oft auftragen, als es angehet, und sodann den übrigen Rest, wie vorhin, messen. So findet man LQ = $36\frac{1}{2}$ Ruthen, nemlich LB = 30 Ruthen, und PQ = $6\frac{1}{2}$ Ruthen.

266 §.

Auf einer graden Linie *LM* ein Stück von *L* angerechnet, aufzutragen, das nach einem bekanten Maaßstab in Zahlen ausgedruckt ist.

Aufl.

Aufl. Soll z. E. LM 18 Ruthen lang seyn: so setze man die eine Spitze des Circul-Instruments auf dem gegebenen Maaßstab in H, und öfne das Instrument so weit, bis die andre Spitze in dem 18ten Theilungspunct, von H angerechnet, trift. Diese Länge trage man von L nach M auf (42 §). Sollten es 28 Fuß seyn: so müste man die erste Spitze des Instruments in B setzen, u. s. f. Sollte die Länge LM größer seyn, als der ganze Maaßstab ist: so müste man die gegebene Anzahl Ruthen, die der Maaßstab fasset, dividiren; alsdann den ganzen Maaßstab zwischen den Spitzen des Circul-Instruments fassen, und denselben auf LM nacheinander so oft auftragen, als der ganze Theil des Quotienten anzeigt, und überdem noch ein Stück von so vielen Ruthen, als der übriggebliebene Rest angiebt.

267 §.

Das Maaß eines Winkels muß ein Winkel seyn, dessen Größe ein für allemal als bekannt angenommen werden kan. Zu dieser Absicht ist der rechte Winkel am geschicktesten (21 §). Deswegen kan man entweder den rechten Winkel selbst, oder einen aliquoten Theil desselben bey Ausmessung der übrigen Winkel für das Maaß annehmen. Man hat aus dieser Ursache denjenigen Theilen des rechten Winkels, die man zu Maaßen der übrigen Winkel gebraucht, ihre eigenen Nahmen gegeben. Der 90ste Theil eines rechten Winkels heist ein **Grad**, der 60ste Theil eines Grades eine **Minute**, der 60ste Theil einer Minute eine **Secunde**, der 60ste Theil einer Secunde eine **Tertie**, u. s. f. Damit es nicht nöthig seyn möge, diese Wörter: Grade, Minuten,

u. s. f. so oft hinzuschreiben, wenn in weitläuftigen Rechnungen solche Zahlen vorkommen, welche Winkel ausdrücken; hat man folgende Zeichen dafür festgesetzet, die man rechter Hand der Zahlen oberwärts hinschreibt. Das Zeichen (°) bedeutet Grade, (′) Minuten, (″) Secunden, (‴) Tertien, (⁗) oder (IV) Quarten, u. s. f. Also liest man den Ausdruck: 53° 27′ 18″ 35‴ so: 53 Grade, 27 Minuten, 18 Secunden, 35 Tertien.

Eben diese Zeichen werden auch wol gebraucht, die Ruthen, Fuße, Zolle, Linien, Scrupel beym Längen-Maaße anzudeuten, vornemlich beym Duodecimal-Maaße. Denn würden die Zahlen 98° 7′ 9″ 5‴ 3^{IV} so zu lesen seyn: 98 Ruthen, 7 Fuß, 9 Zoll, 5 Linien, 3 Scrupel. Man weiß es allemahl, ob die vorkommenden Zahlen die Größe von Linien, oder Winkeln ausdrücken, daher ist davon eben keine Verwirrung zu besorgen, daß hier einerley Zeichen verschiedene Bedeutungen haben. Ueberdem ist es beym Decimal-Maaß fast gar nicht nöthig, diese Zeichen zu gebrauchen, indem man nun z. E. die vorigen Zahlen bequemer so schreibt: 98,7953 Ruthen.

268 §.

Bey dieser Art die Winkel zu messen kömt es also zuförderst darauf an, den rechten Winkel in seine Grade, Minuten, u. s. f. einzutheilen: und dies ist bewerkstelliget, wenn man einen zwischen seinen Schenkeln beschriebenen Quadranten in so viele Theile eintheilt (118 §). Einen auf dem Papier gezeichneten Winkel BAC, oder EAC könte man also auf die-
128 F. se Art messen.

Aus der Spitze A desselben richte man über dem

einen

einen Schenkel die senkrechte Linie AD auf, und beschreibe aus dem Mittelpunct A mit einem willkührlichen Halbmesser zwischen den Schenkeln des rechten Winkels DAC den Bogen FG; dieser wird ein Quadrant von seiner Peripherie seyn (116 §), und dieser Bogen FG müste nun in 90 gleiche Theile getheilet werden. Aber in der Elementar-Geometrie hat man keine Regeln, nach welchen sich diese Theilung vollständig bewerkstelligen liesse. Deswegen muß man mit der Theorie hier Versuche verbinden, und sich übrigens des Circul-Instruments bey der Theilung bedienen.

Weil der Quadrant FG 90 Theile haben soll: so bekömt die ganze Peripherie 4 × 90, oder 360 solcher Theile. Nun schneidet der Halbmesser AF = FH, $\frac{1}{6}$ der Peripherie, also 60 solcher Theile ab, und es bleiben für HG 30 solcher Theile. Man kan also HI = HG nehmen: so komt bey I der 30ste, bey H der 60ste, und bey G der 90ste Theilungs-Punct. Nun muß man durch Versuche einen dieser Bogen FI in 3 gleiche Theile eintheilen: so erhält man die Eintheilung von 10 zu 10 Theilen, die man denn auch auf IH, HG aufträgt. Der Bogen F 10 halbirt, behält nun 5 Theile, und der Bogen F 5 in 5 gleiche Theile durch Versuche getheilt, giebt die einzelnen Theile, wie F 1. Also wäre der Winkel FA1 = 1 Grad. Alle übrige Bogen muß man nun eben so theilen, und Acht geben, ob AB durch einen Theilungspunct durchgehet, da denn die darneben stehende Zahl, die Anzahl der Grade angiebt, die der Winkel BAC hält, welches in der 125 Fig. 50 Grade seyn würden. Gienge AB zwischen zweenen Theilungs-Puncten durch: so müste man die halben und viertel Grade nach dem Augenmaaße schätzen. Wenn

Wenn der gegebene Winkel stumpf ist, wie EAC: so muß man den Quadranten FG durch G fortführen, bis er EA erreicht, und die Abtheilungen des Quadranten über G hinaus tragen, da man denn eben so wie vorhin findet, wie viele Grade der Winkel EAC halte, welches in der Zeichnung 120 Grade seyn würden.

269 §.

Man siehet leicht, daß es hier nicht nöthig sey die Linien von A nach den Theilungspuncten, wie F1 eine ist, alle zu ziehen, und auf die Art den rechten Winkel selbst zu theilen. Wenn man nur weiß, wie viele Abtheilungen des Quadranten zwischen den Schenkeln des Winkels fallen: so weiß man auch, wie viele Grade er hält. Es ist eben so beschaffen mit den kleinern Abtheilungen der Grade in Minuten, Secunden, u. s. f., wenn man den Halbmesser AF groß genug nimt. Deswegen giebt man diesen Theilen des Bogens eben die Nahmen, die man den dazu gehörigen Theilen des rechten Winkels giebt. Der 90ste Theil des Quadranten heist ein Grad u. s. f. Also gehen auf die halbe Peripherie 180, und auf die ganze Peripherie 360 solcher Grade. Die Anzahl der Grade, Minuten, Secunden, u. s. f. eines Kreisbogens drückt also sein Verhältniß zum Quadranten zur halben und ganzen Peripherie aus, so wie eben diese Anzahl der Grade, Minuten, u. s. f. das Verhältniß, des zu dem Bogen gehörigen Winkels am Mittelpunct zu einem rechten, zu zweenen, oder vier rechten Winkeln ausdrückt (224 §).

Verschiedene Kreisbogen, die eine gleiche Anzahl von Graden, Minuten, u. s. f. halten, sind ähnliche Kreisbogen, und gehören zu einerley Winkel (227 §).

270 §.

270 §.

Diese Art nun, einen auf dem Papier gezeichneten Winkel vermittelst jedesmahliger Theilung des Bogens zu messen, würde in der Ausübung sehr weitläuftig und beschwerlich seyn. Und dieser Unbequemlichkeit hilft das Instrument ab, welches unter dem Nahmen des **Winkelmessers**, oder **Transporteurs** bekannt ist. Man braucht nemlich nur einen, 129 F. ein für allemahl in seine 180 Grade, und wenn es angehet, auch Minuten, u. s. f. eingetheilten Halbkreis, der so eingerichtet ist, daß man seinen Mittelpunct an der Spitze des zu messenden Winkels, und zugleich seinen ersten Theilungspunct an dem einen Schenkel anlegen kan. Denn nun ist nichts weiter nöthig, als daß man nur die Grade, Minuten, u. s. f. des Bogens zehle, der zwischen den Schenkeln des Winkels fällt. Hierauf gründet sich folgende Einrichtung des Transporteurs, den die 129 F. nach seiner Haupteinrichtung vorstellet.

Auf dem graden Lineal DEGF stehet der eingetheilte Halbkreis DHE so, daß sein Mittelpunct A in der Schärfe DE des Lineals fällt, und diese Schärfe DE selbst sein Durchmesser ist, weswegen dieser Punc A darin besonders bezeichnet seyn muß. Die Grade sind gewöhnlich auf zweyerley Art von D durch H nach E, und zugleich rückwärts von E durch H nach D gezehlt so, daß der Anfang und das Ende der Eintheilung in den Durchmesser DE fällt, und man hat davon den Vortheil, daß der Transporteur allemahl das Maaß zweyer Nebenwinkel auf einer graden Linie zugleich angiebt. Daraus ergiebt sich nun leicht die Auflösung folgender beyder Aufgaben.

271 §.

129 F. Einen gradlinichten Winkel *BAC*, der auf dem Papier gezeichnet ist, vermittelst des Transporteurs zu messen.

Aufl. Man lege den Transporteur so auf den Winkel, daß sein Mittelpunct auf der Spitze *A* des Winkels fällt, und die Schärfe des Lineals DE an dem einen Schenkel AC genau anliegt. Man zehle nun die Grade auf dem Bogen, der zwischen diesem, und dem andern Schenkel AB des Winkels fällt, und zwar so, daß man in AC zu zehlen anfängt: so weiß man, wie viele Grade der Winkel BAC halte. In der Zeichnung sind es 50 Grade. Die dabey stehende zwote Zahl 130 zeigt, daß der Nebenwinkel 130° halte.

272 §.

An einer gegebenen Linie *AC* und einem Punct *A* derselben vermittelst des Transporteurs einen Winkel zu setzen, der eine gegebene Anzahl von Graden, Minuten, u. s. f. hält.

Aufl. Man lege den Transporteur an AC so an, daß der Mittelpunct auf A fällt, und die Schärfe des Lineals DE an AC anliegt: man zehle nun von AC angerechnet die gegebene Anzahl von Graden fort, und wenn überdem noch Minuten, u. s. f. gegeben sind; schätze man das übrige nach dem Augenmaaß. Man mache nun an dem Umfang des Transporteurs bey dem letzten Grade, z. E. bey dem 50sten, wenn der Winkel 50 Grade halten soll, einen Punct K, oder rücke K nach dem Augenmaaß noch um $\frac{1}{3}$tel $\frac{1}{6}$tel u. s. f. eines Grades weiter, wenn etwa noch 20 oder 10 Minuten, u. s. f. mehr gegeben wären. Durch A und K ziehe man AB: so ist BAC der verlangte Winkel.

Von

Von diesem Gebrauch hat das Instrument den Nahmen Transporteur, indem man vermittelst desselben auf dem Papier einen Winkel von gegebener Größe, wohin man will, zeichnen, und von einem Ort zum andern tragen kan.

273 §.

Einen Kreis vermittelst des Transporteurs in eine verlangte Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Aufl. Man dividire 360°. durch die gegebene Anzahl der gleichen Theile, die man sucht: so drückt der Quotient die Anzahl der Grade, Minuten, u. s. f. aus, welche jeder gesuchte Theil des Kreises fasset.

Ist nun in dem Umfang des Kreises ein Punct A gegeben, oder willkührlich angenommen, wo die Theilung ihren Anfang nehmen soll: so ziehe man für diesen Punct den Halbmesser AC, und setze an demselben bey C einen Winkel ACB, der die gefundene Anzahl Grade hält (272 §): so wird BC den gesuchten aliquoten Theil AB der Peripherie abschneiden, und man wird die Sehne dieses Bogens so oft, als verlangt ward, in der Peripherie herumtragen, und hiedurch die Theilung bewerkstelligen können. 130 F.

Dieses Verfahren dienet also in der Ausübung, wenn man in oder um den Kreis ein reguläres Polygon beschreiben soll, das eine verlangte Anzahl Seiten hat (138. 144 §). So würde man für das reguläre Fünfeck den Winkel ACB = 72° nehmen müssen.

274 §.

Wendet man diese Art, die Winkel auszumessen auf die Lehre von den Dreyecken an: so komt man leicht

leicht von selbst auf folgende Sätze. Alle drey Winkel eines Dreyecks zusammen betragen 180° (87 §).

131 F. Weis man also die Größe eines Winkels BAC in Graden, und man subtrahirt diese Anzahl von 180°: so weis man, wie viel die beyden übrigen B + C zusammen betragen. Es sey A = 65° 18′ 34″: so giebt die Rechnung

$$\begin{array}{rrrr} A+B+C = & 180° & 0' & 0'' \\ A = & 65° & 18' & 34'' \\ \hline \text{also } B+C = & 114° & 41' & 26''. \end{array}$$

Weis man die Größe zweener Winkel A und B und man subtrahirt ihre Summe von 180°: so hat man den dritten Winkel. Es sey z. E.

$$\begin{array}{rrrr} A = & 65° & 18' & 34'' \\ B = & 53° & 25' & 36'' \\ \hline \text{so ist } A+B = & 118° & 44' & 10'' \end{array}$$

Dies subtrahirt

$$\begin{array}{rrrr} \text{von} & 180° & 0' & 0'' \\ \hline \text{giebt } C = & 61° & 15' & 50''. \end{array}$$

Weil im gleichseitigen Dreyeck alle drey Winkel gleich groß sind (55 §): so beträgt jeder Winkel $\frac{1}{3}$ 180°, oder jeder Winkel eines gleichseitigen Dreyecks ist 60° groß.

275 §.

Es lassen sich also für ein reguläres Polygon, wenn die Anzahl der Seiten gegeben ist, auch leicht die Centri- und Polygon-Winkel berechnen. Den Centriwinkel hat man, wenn 360° durch die Anzahl der Seiten dividirt werden; und der Centri-Winkel von

180° subtrahirt, giebt den Polygon-Winkel. So

wird für das	der Centri-W.	der Polygon-W.
Dreyeck	120° 0′ 0″	60° 0′ 0″
Viereck	90° 0′ 0″	90° 0′ 0″
Fünfeck	72° 0′ 0″	108° 0′ 0″
Sechseck	60° 0′ 0″	120° 0′ 0″
Siebeneck	51° 25′ 42$\frac{6}{7}$″	128° 34′ 17$\frac{1}{7}$″
Achteck	45° 0′ 0″	135° 0′ 0″
Neuneck	40° 0′ 0″	140° 0′ 0″
Zehneck	36° 0′ 0″	144° 0′ 0″

Also läst sich auch die Aufgabe des 141 § durch 130
Hülfe des Transporteurs auflösen. Wenn nemlich F.
über AB ein reguläres Polygon, z. E. ein Fünfeck gesetzt werden soll: so setzt man bey A und B nach dem 272 § den berechneten halben Polygon-Winkel an, der für das Fünfeck 72° groß ist: so giebt sich der Mittelpunct C des Kreises, darin sich AB fünfmahl herumtragen läst.

Der XI. Abschnitt.

Von der Ausmessung ebener Figuren.

276 §.

Den Flächen Inhalt eines Parallelogramms 131
P auszurechnen, wenn die Grundlinie, F.
und Höhe desselben gegeben sind.

Aufl. Man muß eine andre ebene Figur, deren Größe als bekannt voraus gesetzt werden kan, für das Maaß annehmen (259 §), und untersuchen,

wie oft diese entweder selbst, oder ein aliquoter Theil von ihr in dem Parallelogramm enthalten sey. In solcher Absicht erwählt man ein Quadrat Q dessen Seite L so lang ist, als eines von den im 260 § erwehnten Maaßen, z. E. ein Fuß, eine Ruthe u. s. f. Ein solches Quadrat erhält den Nahmen von diesem Längenmaaße, dem die Seite desselben gleich ist. Es heist eine Quadrat-Ruthe, ein Quadrat-Fuß, ein Quadrat-Zoll u. s. f., nachdem L eine Ruthe einen Fuß, einen Zoll lang ist, u. s. f. Wenn nun die Grundlinie AB, nebst der Höhe CE in Zahlen gegeben sind, wobey L die Einheit ist: so hat man aus dem 248 §. die Proportion $Q : P = L \times L : AB \times CE = 1 : AB \times CE$. Demnach ist das Quadrat Q im Parallelogramm P so vielmahl enthalten, als das Product aus der Grundlinie AB in die Höhe CE ausdrückt, und der Flächen-Inhalt des Parallelogramms wird gefunden, wenn man dies Product sucht.

Es sey AB = 39,36 R.
CE = 54,78 R.

31488
27552
15744
19680

so wird P = 2156,1408 Q. R.

277 §.

Die Quadrate selbst gehören in die Classe der Parallelogrammen, und die Grundlinie eines Quadrats ist seiner Höhe gleich. Wenn man also die nach einem bekannten Maaß gemessene Seite eines Quadrats

drats mit sich selbst multiplicirt: so drückt das Product aus, wie vielmahl ein Quadrat, dessen Seite = 1 ist, in jenem enthalten sey, und dies ist der Ursprung des Nahmens einer Quadratzahl (180 § R.). Eine Quadrat-Ruthe enthält demnach 100 Q. F., weil ihre Seite nach der Decimal-Abtheilung = 10 F. ist. Aus eben der Ursache enthält ein Quadrat-Fuß 100 Quadrat-Zoll, ein Quadrat-Zoll, 100 Quadrat-Linien, u. s. f.

Dieser Umstand ist deswegen besonders anzumerken, weil er dazu dienet, den Decimal-Theilen ihre gehörige Bedeutung zu geben, die an einer ganzen Zahl anhängen, welche den Flächen-Inhalt einer Figur ausdrückt, wenn die Einheit eine Quadrat-Ruthe, oder Quadrat-Fuß u. s. f. ist. So fand man im vor. §. das Parallelogramm P = 2156, 1408 Q. R. oder P = 2156 $\frac{1408}{10000}$ Q. R. Man bringe den anhängenden Bruch auf Quadrat-Fuß, nach dem 146 §. R. so hat man $\frac{1408}{10000}$ Q. R. = $\frac{1408}{10000}$ 100 Q. F. = 14,08 Q. F. Eben so werden $\frac{8}{100}$ Q. F. = 8 Quad. Zolle und deswegen sind 2156,1408 Q. R. so viel, als 2156 Q. R. 14 Q. F. 8 Q. Z.

Man kan sich auf solche Art jedes mahl die an einer Zahl von dieser Art anhängende Decimalzahl von der Linken gegen die Rechte so eingetheilt vorstellen, daß jede Classe zwo Ziffern bekomt, und es werden diese Classen Quadratfüsse, Quadratzolle, Quadratlinien, u. s. f. nacheinander bedeuten, wenn die Einheit eine Quadrat-Ruthe ist. Wie sich dies ändre, wenn die Einheit ein Quadratfuß, oder Quadratzoll, u. s. f. ist, fällt leicht in die Augen. Wäre die Anzahl der Decimalstellen ungrade: so erhält

man durch Hinzusetzung der o eine grade Anzahl, welches den Werth der Zahl bekannter massen nicht ändert. So sind 453,73269 D. R. = 453 D. R. 73 D. F. 26 D. Z. 90 D. L. Denn 0,73269 D. R. = 0,73269 × 100 D. F. = 73,269 D. F., und 0,269 D. F. = 0,269 × 100 D. Z. = 26,9 D. Z., aber 0,9 D. Z. = 0,9 × 100 D. L. = 90 D. L.

278 §.

Nach dem Duodecimal-Maaß enthält eine Quadrat-Ruthe 144 Quadrat-Fuß, ein Quadrat-Fuß enthält 144 Quadrat-Zoll, ein Quadrat-Zoll 144 Quadrat-Linien, u. s. f. Dies vorausgesetzt, kan man leicht das Decimal-Quadratmaaß auf Duodecimal-Quadratmaaß, und umgekehrt: dieses auf jenes bringen. Es dienen dazu folgende Sätze, als Folgen des vorigen.

Eine Decimal-Quadratruthe hat 100 Quadrat-Fuß, 10000 Quadratzoll, 100000 Quadratlinien u. s. f.

Ein Decimal-Quadratfuß hat 100 Quadratzoll, 10000 Quadratlinien, 100000 Quadratscrupel, u. s. f.

Ein Decimal-Quadratzoll hat 100 Quadratlinien, 10000 Quadratscrupel, u. s. f.

Eine Duodecimal-Quadratruthe hat 144 Quadratfuß, 20736 Quadratzoll, 2985984 Quadratlinien, u. s. f.

Ein Duodecimal-Quadratfuß hat 144 Quadrat-Zoll, 20736 Quadratlinien, 2985984 Quadrat-Scrupel, u. s. f.

Ein Duodecimal-Quadratzoll hat 144 Quadratlinien, 20736 Quadratscrupel, u. s. f.

Frägt man nun: 63 Q. F. 95 Q. Z. Decimal-Maaß, wie viel sind es Q. F. und Q. Z. nach der Duodecimal-Eintheilung? vorausgesetzt, daß die Ruthe für beyde Abtheilungen einerley sey: so weis man, daß 63 Q. F. 95 Q. Z. nach der Decimal-Eintheilung so viel sind, als $\frac{6395}{10000}$ Q. R. Dies bringt man so auf Duodecimal-Quadratfuße. Man setzt $\frac{6395}{10000}$ Q. R. $= \frac{6395}{10000} \times 144$ Duod. Quad. F: so erhält man 92,0880 Duod. Q. F. Man erhält ferner auf eben die Art 0,0880 Duod. Quad. F. $=$ 0,088 $\times$ 144 Duod. Q. Z. $=$ 12,672 Duod. Q. Z., und 0,672 Duod. Q. Z. $=$ 0,672 $\times$ 144 Duod. Q. L. $=$ 96,768 Duod. Q. L. Demnach sind 63 Q. F. 95 Q. Z. Decimalmaaß so viel, als 92 Q. F. 12 Q. Z. 96,768 Q. L. Duod. Maaß, wenn nemlich die Ruthe für beyde Abtheilungen einerley ist.

279 §.

Den Flächen-Inhalt eines Dreyecks *ABC* 131 auszurechnen, wenn eine Seite desselben *AB* F. nebst der gehörigen Höhe *CE* nach einem bekannten Maaß in Zahlen gegeben sind.

Aufl. Wenn auf eben der Grundlinie AB, in eben der Höhe CE ein Parallelogramm P stehet: so ist das Dreyeck ABC $= \frac{1}{2}$ P. Da nun P $=$ AB $\times$ CE: so wird ABC $= \frac{1}{2}$ AB $\times$ CE. Demnach giebt das halbe Product aus der Grundlinie eines Dreyecks in seine Höhe den Flächen-Inhalt des Dreyecks im Quadrat-Maaß.

Wenn also AB $=$ 39, 36 R, CE $=$ 54, 78 R: so wird das Dreyeck ABC $=$ 1078,0704 Quad. R. oder 1078 Q. R. 7 Q. F. 4 Q. Z.

280 §.

132 F. Ein Trapezium *ABCD* auszurechnen, wenn beyde parallele Seiten, *AB*, *CD*, nebst ihrer Entfernung, oder der Höhe des Trapezii *DE* gegeben sind.

Aufl. Die halbe Summe der parallelen Seiten $\frac{1}{2}(AB+CD)$ multiplicire man in die Höhe DE: so drückt das Product den Inhalt des Trapezii aus.

Beweis. Man ziehe die Diagonale BD: so ist das Dreyeck $ABD = \frac{1}{2}AB.DE$, und das Dreyeck $CBD = \frac{1}{2}CD.DE$ (279 §). Also $ABCD = ABD + CBD = \frac{1}{2}AB.DE + \frac{1}{2}CD.DE = \frac{1}{2}(AB+CD)DE$.

281 §.

Den Inhalt eines regulären Polygons auszurechnen, wenn man weis, wie groß jede Seite desselben, und die Entfernung der Seiten vom Mittelpunct des Kreises ist, der sich um das Polygon beschreiben läst.

Aufl. Wenn man die Zahl, welche die Länge der Seite ausdrückt, mit der Anzahl der Seiten multiplicirt: so hat man den ganzen Umfang des Polygons, und das halbe Product aus diesem Umfang in die Entfernung der Seiten vom Mittelpunct des Kreises, der sich um das Polygon beschreiben läst, giebt den Flächen-Inhalt desselben. Denn es giebt den Inhalt eines dem Polygon gleichen Dreyecks (143 §).

282 §.

Eine jede andre gradlinichte Figur auszurechnen, wenn man alle ihre Diagonalen, und die diesen Diagonalen zugehörigen Höhen der

Drey-

Dreyecke messen kan, in welche die Figur durch diese Diagonalen vertheilt wird.

Aufl. Man berechne den Inhalt eines jeden dieser Dreyecke besonders nach dem 279 §, und bringe zuletzt alle gefundene Zahlen in eine Summe: so hat man den Inhalt der ganzen Figur.

Im Viereck ABCD ist eine Diagonale AC hinlänglich, und wenn man diese für die gemeinschaftliche Grundlinie der beyden Dreyecke ABC, ADC nimt, so, daß BF, DE die Höhen werden; so ist das ganze Viereck $= \frac{1}{2}$AC. BF $+ \frac{1}{2}$AC. DE $= \frac{1}{2}$AC (BF + DE), so, daß man den Inhalt auf einmal durch eine einzige Multiplication findet, welches die Rechnung verkürzt.

In jeder andern Figur, die mehr als vier Seiten hat, machen zwey Dreyecke, die an einer Diagonale liegen, ein solches Viereck aus. Daher kan man zu Verkürzung dieser Rechnung alle diese Vierecke auf die jetzt beschriebene Art berechnen, und zuletzt alles mit den etwa noch übrigen Dreyecken in eine Summe bringen.

283 §.

Wenn die Länge zwoer Seiten eines bey *D* rechtwinklichten Dreyecks *BDC* gegeben ist, die Länge der dritten Seite zu berechnen, vorausgesetzt, daß man aus einer jeden Zahl die Quadrat-Wurzel ausziehen könne.

Aufl. Sind beyde Catheti BD, CD gegeben: so mache man von jedem Catheto die Quadrat-Zahl, diese addire man zusammen, und ziehe aus der Summe die Quadrat-Wurzel: so hat man die Hypothenuse BC. 130 F.

Ist nebst der Hypothenuse BC ein Cathetus BD gegeben: so ziehe man die Quadratzahl des gegebenen Catheti von der Quadratzahl der Hypothenuse ab, und suche aus dem Rest die Quadrat-Wurzel: so hat man die Länge des andern Catheti.

Beweis. Es ist $BC^q = BD^q + CD^q$ (111 §). Also $BC \times BC = BD \times BD + CD \times CD$ (277 §), und $BC = r(BD \times BD + CD \times CD)$ (183 §. R.). Es ist ferner $CD^q = BC^q - BD^q$ (111 §), oder $CD \times CD = BC \times BC - BD \times BD$ (277 §). Also $CD = r(BC \times BC - BD \times BD)$.

Wäre $BD = CD = 1$: so wäre $BC = r2$. Also sind in diesem Fall BC und BD incommensurable Linien.

284 §.

130 F. Wenn die Seite *AB* eines regulären Polygons nebst dem Halbmesser *BC* des um dasselbe beschriebenen Kreises gegeben ist, die Seite *EB* eines in eben dem Kreise beschriebenen Polygons, das doppelt so viele Seiten hat, zu berechnen.

Aufl. Weil der Bogen $AE = EB$: so ist der Halbmesser CE auf AB senkrecht, und $BD = \frac{1}{2}AB$. Deswegen erhält man nach dem vorigen § $CD = r(BC^q - BD^q)$. Ferner wird $ED = CE - CD$, also wiederum nach dem vorigen 283 § $BE = r(ED^q + BD^q)$.

285 §.

Das Verhältniß zwischen dem Durchmesser eines Kreises, und seinen Umfang zu finden, welches vermöge des 223 § in allen Kreisen einerley ist.

Aufl. Wenn AB die Seite des im Kreise beschriebenen Quadrats ist, und man setzt den Halbmesser AC = 1: so wird AB = $\sqrt{2}$ (283 §). Hieraus findet man die Seite des Achtecks EB nach dem (284 §), und wenn diese gefunden ist, eben so die Seite des Sechszehnecks, da sich dann jedesmahl der Umfang eines solchen Polygons ergiebt, wenn man mit der Anzahl der Seiten desselben die herausgebrachte Zahl multiplicirt. Nun weis man aus dem 221 §, daß der Unterschied des Umfangs eines solchen Polygons vom Umfang des Kreises kleiner werden könne, als eine jede gegebene Linie, wenn man mit Verdoppelung der Seiten fortfährt. Man setzt also die Rechnung so lange fort, bis man versichert ist, daß dieser Unterschied einen so kleinen Theil des Halbmessers betrage, der in der Ausübung aus der Acht gelassen werden kan.

Um zu erfahren, wie viel dieser Unterschied bey einer gewissen Anzahl von Seiten höchstens betragen könne, berechnet man auch den Umfang eines Polygons um den Kreis, das eben so viele Seiten hat. Hat man nemlich den Abstand CD der Seite AB des inwendigen Polygons vom Mittelpunct C, und ist EF die halbe Seite des auswendigen Polygons, von eben so viel Seiten: so schließt man CD : BD = CE : EF, woraus sich die halbe Seite des auswendigen Polygons, und folglich desselben Umfang ergiebt. Der Unterscheid zwischen des auswendigen und inwendigen Polygons Umfang beträgt mehr, als der Unterschied zwischen des Kreises und des inwendigen Polygons Umfang. Berechnet man also jedesmahl beyde Polygone: so hat man ein paar Grenzen, zwischen welchen die Zahl, welche den Umfang des Krei-

ses ausdrückt, nothwendig fallen muß: oder wenn man nur die Hälfte dieser beyden Zahlen nimt: so hat man ein paar Grenzen, zwischen welchen der halbe Umfang des Kreises fällt.

Auf diese Art hat man gefunden, wenn der Halbmesser = 1 ist, daß der halbe Umfang > 3,1415926; und zugleich < 3,1415927 sey, also kan man ihn = 3,1415926 annehmen, und man irret nicht um $\frac{1}{10000000}$ theilchen des Halbmessers. Weil sich nun der Durchmesser d zum Umfang p, wie der Halbmesser zum halben Umfang verhält: so erhält man $d:p = 1:3,1415926$, welches Verhältniß beynahe $= 113:355$ ist. Diese letzten beyden Zahlen hat Metius gefunden. Jene Zahl aber 3,1415926, welche den halben Umfang für den Halbmesser = 1 ausdrückt, enthält nur die ersten sieben Decimalstellen von derjenigen Zahl, die Ludolf von Cölln bis auf 32 Decimalstellen berechnet hat. In der Ausübung sind die ersten sieben Decimalstellen in den meisten Fällen überflüßig genau. Man nimt gemeiniglich nur die zwey oder drey ersten, und setzt $d:p = 1,:3,141 = 1000:3141$, oder auch nur $d:p = 1:3,14 = 100:314$. Bey Rechnungen, wo mehr Schärfe erfordert wird, kan man Metii Verhältniß $d:p = 113:355$ vortheilhaft brauchen.

286 §.

Wenn der Durchmesser eines Kreises gegeben ist, nicht allein seinen Umfang, sondern auch die Länge eines jeden in Graden ausgedruckten Bogens von diesem Kreise zu berechnen.

Aufl. Man schließt: wie 100:314 so der gegebene Durchmesser zum gesuchten Umfange. Und wenn man die Länge eines in Graden gegebenen Bogens sucht: so schließt man weiter: wie 360° zur gegebenen Anzahl Grade: so die gefundene Länge des Umfangs zur Länge des Bogens. Wenn also der Durchmesser 73 Fuß ist; und man sucht nicht allein die Länge des Umfangs, sondern auch die Länge eines Bogens von 63° 17′: so giebt die Rechnung folgende Zahlen:

100: 314 = 73: Umfang.

73

942

2198

229,22 = dem Umfang

360°:63° 17′ = 21600′:3797′ so der gef. Umfang 229,22 zum ges. Bogen.

Also wird der Bogen $= \frac{3797 \times 229{,}22}{21600} =$ 40,29 F.

287 §.

Wenn die Länge des Umfangs gegeben ist, den Durchmesser zu finden: und wenn nebst dem Umfang auch die Länge eines Bogens gegeben ist, die Anzahl der Grade, Minuten, u. s. f. dieses Bogens zu finden.

Aufl. Es sey der Umfang 236 F.: so schliest man umgekehrt 314:100 = 236: Durchmesser, den man also $= \frac{23600}{314} = 75{,}1$ F. findet.

Ver-

Verlangt man die Anzahl der Grade eines Bogens von 112 Fuß, wenn der ganze Umfang 236 F. lang ist, so schliest man 236 F.: 112 F. = 360°: ges. Zahl. Diese wird = $\frac{112 \times 360}{236}$ = 170° 51′.

288 §.

Ein Kreisbogen der eben so lang ist, als sein Halbmesser hat in allen Kreisen einerley Anzahl von Graden, Minuten u. s. f.

Beweis. Ein Kreisbogen A gehöre zum Halbmesser R, und zur Peripherie P, ein andrer *a* zum Halbmesser *r*, und zur Peripherie *p*: so ist vermöge des 223 § P:*p* = R:*r*. Wenn demnach A = R, und *a* = *r*: so ist auch P:*p* = A:*a*, oder P:A = *p*:*a* (182 §). Ist also A = $\frac{n}{360}$ P: so ist auch 1 : $\frac{n}{360}$ = *p*:*a*, und *a* = $\frac{n}{360}$ *p*.

Zu einem solchen Bogen gehört also in allen Kreisen einerley Winkel am Mittelpunct.

289 §.

Die Anzahl der Grade eines Kreisbogens zu finden, der seinem Halbmesser gleich ist.

Aufl. Wenn die Peripherie 314 F. ist: so ist der Durchmesser 100 F., und der Halbmesser 50 F. Ist also die Frage, wie viel Grade ein Bogen von 50 Fuß in diesem Kreise halte? so schliest man nach dem 287 § so: 314:50 = 360: ges. Anzahl Grade. Man findet sie = $\frac{360 \times 50}{314}$ = 57,3 Gr.

Dem-

Demnach hält ein Kreisbogen der seinem Durchmesser gleich ist, 114,6 Grade.

290 §.

Wenn die Länge eines Kreisbogens gegeben ist, nebst der Anzahl seiner Grade, den zugehörigen Halbmesser, oder Durchmesser zu finden.

Aufl. Es sey der Bogen 96 F. lang, und halte 43°. Nun verhalten sich die Längen zweener Kreisbogen wie die zugehörigen Winkel am Mittelpunct (224 §), und dieserwegen, wie die Menge ihrer Grade. Ueberdem weis man aus dem 289 §, daß der dem Durchmesser gleiche Bogen 114,6°, und der dem Halbmesser gleiche Bogen 57,3° halte. Deswegen schliesse man 43° : 114,6° = 96 F : Länge eines dem Durchmesser gleichen Bogens, oder 43° : 57,3° = 96 F : Länge eines dem Halbmesser gleichen Bogens; so weis man im ersten Fall die Länge des Durchmessers, und im zweyten Fall die Länge des Halbmessers. So wird im Exempel der Durchmesser $= \frac{114,6 \times 96}{43} = 255,8$ F. Der Halbmesser $= \frac{57,3 \times 96}{43} = 127,9$ F.

291 §.

Die Fläche eines Kreises auszurechnen, wenn sein Durchmesser d, oder Umfang p gegeben ist.

Aufl. Aus d kan man p, und umgekehrt, aus p wieder d berechnen (286. 287 §). Hat man beydes; so giebt das Product aus dem vierten Theil des

Durch-

Durchmessers in den Umfang die Größe der Kreisfläche. Denn dies ist der Inhalt eines der Kreisfläche gleichen Dreyecks (150 §).

Wenn $d = 73$ F.: so ist $p = 229{,}22$ F. Also die Kreisfläche $= \frac{1}{4} \times 73 \times 229{,}22 = 4183{,}265$ Q. F.

Ist $d = 100$: so wird $p = 314$, und die Kreisfläche $= 314 \times 25 = 7850$. Also verhält sich das Quadrat des Durchmessers zur Kreisfläche, wie $10000 : 7850 = 1000 : 785$. Demnach findet man auch die Kreisfläche, wenn man das Quadrat des gegebenen Durchmessers in die Zahl 0,785 multiplicirt. Für $d = 73$ F. wäre also die Kreisfläche $= 5329 \times 0{,}785 = 4183{,}265$ Q. F. wie vorhin.

292 §.

130 Die Fläche eines Kreis-Ausschnitts *AEBC* F. zu berechnen, wenn die Länge des Bogens *AEB*, und der zugehörige Halbmesser bekannt ist.

Aufl. Die Hälfte des Products aus der Länge des Bogens in den Halbmesser giebt den Inhalt eines dem Ausschnitt gleichen Dreyecks (254 §). Also den Inhalt des Ausschnitts selbst.

Wenn der Bogen AEB 96 Fuß lang ist, und 43° hält: so ist AC = 127,9 F. Also der Ausschnitt AEBC $= \frac{1}{2} \times 127{,}9 \times 96$ Q. F. $= 6139{,}2$ Q. F.

Weis man, wie groß die der Grundlinie AC oder AB zugehörige Höhe des Dreyecks ABC sey: so läst sich das Dreyeck ABC nach dem 279 § berechnen, und wenn man es vom Inhalt des Ausschnitts AEBC subtrahirt: so giebt der Rest den Inhalt des Abschnitts AEBD.

Der Geometrie zweyter Theil.

Die körperliche Geometrie,

nebst

Berechnung der körperlichen Größen.

Der XII. Abschnitt.

Von den verschiedenen Lagen grader Linien, und ebener Flächen, gegen andre ebene Flächen.

293 §.

Wenn man sich von einem geometrischen Körper eine solche Vorstellung macht, wie sie im 4 § beschrieben worden: so enthält diese Vorstellung nichts weiter, als dieses, daß ein Raum von einer gewissen Größe in gewissen Grenzen eingeschlossen sey. Diese Grenzen geben dem Körper das, was wir seine Gestalt oder **Figur** nennen, und eben deswegen heist ein jeder körperlicher Raum der von allen Seiten durch gewisse Grenzen eingeschlossen ist, eine **körperliche Figur**, die man also von einer **ebenen Figur** (29 §) wohl unterscheiden muß. Die Grenzen einer solchen körperlichen Figur sind Oberflächen (5 §) und dies können sowohl ebene, als auch krumme Flächen seyn.

294 §.

294 §.

Eine einzige ebene Fläche kan keine körperliche Figur einschliessen, wohl aber eine einzige krumme Fläche, wie das Beyspiel einer Kugel beweiset.

Wenn man sich nemlich eine einzige ebene Fläche in Gedanken allein vorstellet: so ergiebt sich leicht, daß diese zwar jeden Raum, in welchem man sich diese Ebene vorstellet, in zwey Stücke theile, übrigens aber weder das eine, noch das andre dieser beyden Stücke von allen Seiten einschliessen könne, man mag sich die Ebene so groß man will, vorstellen.

295 §.

Eine ebene Fläche wird durch zweene, oder drey gegebene Puncte gelegt, wenn man ihr eine solche Lage giebt, daß entweder beyde, oder alle drey Puncte in diese Ebene fallen.

In der körperlichen Geometrie nimt man es als eine Vorausſetzung an, daß es allemahl möglich sey, durch zweene, oder auch durch drey gegebene Puncte, die nicht in grader Linie liegen, eine Ebene zu legen.

Dabey stellt man sich die Ebene von unbestimter Grösse vor, so daß man sie in jedem besondern Fall so groß nehmen kan, als nöthig ist.

Daß man sie durch einen Punct legen könne, ist augenscheinlich. Aber um diesen Punct kan man sie, wie man will, drehen, und sie auf solche Art auch an den zweyten Punct bringen. Nun gehet die Ebene zugleich durch die grade Linie, die durch diese zweene Puncte bestimt wird (10 §). Aber um eben diese grade Linie läst sich die Ebene noch drehen, und der

dritte Punct mag ausser dieser Linie liegen wo er wolle: so wird man auf solche Art die Ebene auch an diesen dritten Punct bringen können, wenn man sie nur groß genug annimt.

296 §.

Wenn man durch drey, nicht in grader Linie liegende Puncte *A*, *B*, *C* eine Ebene *DE* gelegt hat: so ist dadurch die Lage dieser Ebene völlig bestimt, und man kan durch eben die drey Puncte keine andre Ebene legen, die von der vorigen, der Lage nach, unterschieden ist, ob sie gleich größer, oder kleiner seyn könnte. Legt man durch eben die Puncte noch mehr Ebenen: so fallen sie insgesamt mit der ersten zusammen. 112 F.

297 §.

Durch eine, und eben dieselbe grade Linie AB kan mehr, als eine Ebene gelegt werden (295 §), und sodann schneiden diese Ebenen einander in dieser graden Linie AB. Allemahl aber, wenn zwo Ebenen CD, EF einander schneiden: so giebt es eine grade Linie, wie AB, die man ihre Durchschnittslinie nennt. Ausser dieser graden Linie AB können beyde Ebenen nichts gemein haben; denn wäre nur noch ein Punct G ausser der graden Linie AB in beyden Ebenen zugleich: so müsten beyde Ebenen zusammenfallen, und könnten einander nicht schneiden (296 §). 135 F.

298 §.

Zieht man durch einen Punct H in der Ebene CD, und einen andern K, der ausser ihr liegt, die grade Linie KL: so schneidet die Ebene CD die grade Linie KL. Allemahl, wenn eine Ebene CD eine grade 135 F.

Linie KL schneidet: so giebt es einen Durchschnittspunct, wie H, und ausser demselben kan die Ebene CD mit der graden Linie KL nichts gemein haben. Denn wäre noch ein Punct I in beyden zugleich: so fiele KL ganz in CD (10 §), und CD könnte KL nicht schneiden.

Jede durch zweene auf verschiedenen Seiten der Ebene CD liegende Puncte K und L gezogene grade Linie KL, wird von der Ebene CD geschnitten: und jede durch zweene auf verschiedenen Seiten der Ebene EF liegende Puncte C und D gelegte Ebene CD, schneidet EF.

299 §.

136 F. Zwo ebene Flächen allein können keinen Körper einschliessen. Ja dies können auch drey Ebenen noch nicht bewerkstelligen; es werden wenigstens vier Ebenen dazu erfodert. Man stelle sich eine Ebene, wie BCD vor, und gebe ihr die Gestalt eines Dreyecks. Durch eine Seite BC lege man eine neue Ebene ACB, und ziehe in derselben willkührlich die grade Linie CA. Man nehme einen Punct A in CA, einen andern D in CD, und lege durch A, C und D, die Ebene ACD: so wird von diesen dreyen Ebenen um C herum zwar ein körperlicher Raum eingeschlossen, dieser ist aber noch nicht von allen Seiten begränzt. Nimt man aber überdem einen Punct A in AC, B in BC, D in CD, und legt durch A, B, D eine vierte Ebene ABD: so komt eine körperliche von vier ebenen Flächen eingeschlossene Figur heraus.

300 §.

Die ebenen Flächen, welche den Körper einschliessen, heissen seine Seitenflächen (hedræ) so wie die gra-

graden Linien, worin die Seitenflächen einander schneiden, seine Seitenlinien (termini lineares) genannt werden.

Die Anzahl der Seitenlinien ist in jedem Körper größer, als die Anzahl der Seitenflächen. Es sey nemlich die Anzahl der Seitenflächen $= h$ so groß, als sie wolle: so wird die Anzahl der Seitenlinien aller Seitenflächen nicht kleiner, als $3h$ seyn können, weil jede Seitenfläche wenigstens 3 Seiten-Linien hat (30 §). Aber jede Seitenfläche hat mit einer andern anliegenden eine Seitenlinie gemein. Demnach ist die Anzahl aller Seitenlinien des Körpers nur halb so groß, als die Anzahl der Seitenlinien aller Seitenflächen. Wenn also l die Anzahl aller Seitenlinien des Körpers ist: so kan l nicht kleiner, als $\frac{3}{2}h$ seyn.

301 §.

Die Anzahl aller gradlinichten Winkel auf der gesamten Oberfläche des Körpers ist so groß, als die Anzahl der Winkel aller Seitenlinien der gesamten Seitenflächen (31 §). Aber diese ist doppelt so groß, als die Anzahl aller Seitenlinien des Körpers. Folglich ist die Anzahl aller gradlinichten Winkel auf der Oberfläche des Körpers $= 2l$.

302 §.

Diese kurze und noch sehr unvollkomne Betrachtung über die Art und Weise, wie ebene Oberflächen einen Körper begränzen können, wird die Nothwendigkeit der folgenden Untersuchungen darlegen. Bey dem Umfang ebener Figuren waren nur die Seiten und Winkel zu unterscheiden, und es ließ sich demnach von ihnen nichts brauchbares erweisen, bevor

über die Natur gradlinichter Winkel, oder über die verschiedenen Lagen einer graden Linie gegen andre, die mit ihr in einer Ebene gezogen sind, ziemlich ausführliche Untersuchungen angestellet waren. Bey dem Umfang eines Körpers werden die Seitenflächen das, was im Umfang einer ebenen Figur die Seitenlinien waren. Diese Seitenflächen schneiden sich gleichfalls unter gewissen Winkeln, und selbst die Seitenlinien machen mit den Seitenflächen gewisse Winkel. Das ist die Ursache, warum man von dem Körper nichts brauchbares erweisen kan, bevor man von der verschiedenen Lage einer graden Linie gegen eine Ebene, oder einer Ebene gegen die andre, richtig zu urtheilen im Stande ist.

303 §.

137 F. Wenn eine Ebene CG eine andre FH in der graden Linie AB schneidet: so kan man durch einen Punct B in der Ebene CG auf AB die senkrechte Linie CD, und zugleich durch eben den Punct B in der Ebene FH auf AB die senkrechte Linie EF ziehen (88 §). Legt man nun durch den Winkel CBF die Ebene LM: so stehet AB auf zwoen unterschiedenen in der Ebene LM gezogenen graden Linien, im Durchschnittspunct B senkrecht.

Eine grade Linie AB also kan auf zwoen andern CD, EF, die sich in B schneiden, im Durchschnittspunct B senkrecht seyn, wenn sie mit ihnen nicht in einer Ebene liegt, welches aber nicht seyn könnte, wenn AB ebenfalls in der Ebene LM gezogen wäre.

304 §.

137 F. Wenn eine grade Linie AB, so von einer Ebene LM in B geschnitten wird, daß sie auf alle durch B

in der Ebene LM gezogenen graden Linien BC, BI, BK, BF, u. s. f. senkrecht ist; so schneidet LM die grade Linie IB senkrecht, und AB steht auf der Ebene LM senkrecht, oder lothrecht, auch heist AB eine Normallinie auf LM. Ist aber AB nicht auf alle durch B in LM gezogene Linien senkrecht; so wird AB von LM schief geschnitten, oder AB stehet schief auf LM.

305 §.

Eine grade Linie *AB*, die nur auf zwoen in der Ebene *LM* gezogenen graden Linien *CD*, *EF* im Durchschnittspunct *B* senkrecht ist, stehet auf der Ebene *LM* selbst senkrecht. 138

Beweis. Man ziehe in der Ebene LM durch B eine grade Linie GH, die von den vorigen CD und EF unterschieden ist. Wenn nun diese zwischen des Winkels CBE Schenkeln fällt: so nehme man BC und BE von willkührlicher Größe, und ziehe CE, welche GH in G schneiden wird (33 §). Man nehme ferner BD = BC, BF = BE, und ziehe DF: so ist DF mit CE parallel, weil BC : BD = BE : BF (205 §), und GH schneidet auch DF so, daß BG = BH wird (205 §). Ueberdem wird EC = DF, und EG = FH (54 §). Ziehet man nun von A nach den Puncten C, D, E, F, G, H, grade Linien: so wird AC = AD, AE = AF (54 §), und weil auch EC = DF: so wird der Winkel AEG = AFH (64 §). Folglich auch AG = AH (54 §). Demnach ist in den Dreyecken AGB und AHB der Winkel ABG = ABH (64 §), und AB auf GH senkrecht.

Weil dieser Beweis von allen graden Linien gilt, die durch B in der Ebene LM gezogen werden können: so ist AB auf LM senkrecht.

Durch einen Punct B in der Ebene LM läst sich nur eine grade Linie AB auf LM senkrecht ziehen. Denn wäre auch BI auf LM senkrecht: so würde LM von der Ebene ABI in BE geschnitten, und es müste ABE = R = IBE seyn, welches nicht seyn kan (18 §).

Auch durch einen Punkt A ausserhalb LM läst sich nur eine grade Linie AB nach LM senkrecht ziehen. Denn wäre auch AD auf LM senkrecht: so würde LM von der Ebene BAD in BD geschnitten, so, daß ABD = R = ADB wäre, welches dem 72 § zuwider ist.

Die senkrechte Linie AB ist unter allen, die von A nach der Ebene LM gezogen werden können, die kürzeste (75 §), und also die Entfernung des Puncts A von der Ebene LM (35 §).

306 §.

Wenn drey grade Linien BC, BG, BI einander in einem Punct B schneiden, und eine vierte AB stehet auf allen dreyen im Durchschnittspunct B senkrecht: so liegen BC, BG, BI in einer Ebene.

Beweis. Man lege durch den Winkel CBG eine Ebene LM, wenn diese nun nicht zugleich durch BI gehet: so wird sie die Ebene des Winkels ABI in einer graden Linie BE schneiden, die von BI verschieden ist. Nun wird aber ABE = R (305 §), und vermöge der Voraussetzung ist auch ABI = R, welches nicht zugleich seyn kan (21 §). Also muß die Ebene CBG durch BI gehen, wenn auch ABI ein rechter Winkel ist.

307 §.

307 §.

Wenn *AB* auf der Ebene *LM* senkrecht ist, 139
und man ziehet durch einen Punct *D*, der in F.
der Ebene *LM* liegt, mit *AB* die Parallele *CD*:
so ist auch *CD* auf *LM* senkrecht.

Beweis. Die Ebene der Parallelen schneidet LM in der graden Linie BD, und in dieser Ebene liegt auch DA (10 §). In der Ebene LM setze man DE auf DB senkrecht, mache DE = AB, und ziehe BE: so ist AD = BE (54 §). Zieht man also ferner AE: so passen die Dreyecke AEB und AED auf einander (64 §), so, daß ADE = ABE = R. Folglich ist ED auf der Ebene ABCD senkrecht, und CDE = R (305 §). Da nun auch CDB = 2R — ABD (83 §) = R: so steht CD auf LM senkrecht.

308 §.

Zwo grade Linien *AB*, *CD*, die auf einer 139
Ebene *LM* senkrecht stehen, sind parallel. F.

Beweis. Man kan durch D mit AB eine Parallele DF ziehen, diese steht auf LM senkrecht (307 §), und muß also mit DC zusammen fallen (305 §). Demnach ist DC selbst mit AB parallel.

309 §.

Von einem Punct *A*, der ausser der Ebene 140
LM liegt, nach *LM* eine senkrechte Linie zu F.
ziehen.

Aufl. Man ziehe in der Ebene LM eine grade Linie CD, und von A auf CD die senkrechte Linie AE. Durch E ziehe man EF in der Ebene LM auf CD, und hierauf AB durch A auf EF senkrecht: so steht AB auch senkrecht auf der Ebene LM.

Beweis. Weil DEA = R = DEB: so ist CD auf der Ebene ABE senkrecht. Durch B ziehe man mit CD die Parallele GH; so steht auch GH auf der Ebene ABE senkrecht (307 §). Also ist ABH = R = ABE, und AB auf LM senkrecht (305 §).

Durch einen in der Ebene LM gegebenen Punct P kan man also auf LM eine senkrechte Linie PQ ziehen, wenn man von einem willkührlichen Punct A ausser LM nach LM die senkrechte Linie AB, und mit AB die Parallele PQ ziehet (307 §).

310 §.

139 Zwo grade Linien, *AB*, *CD*, die mit einer
F. dritten *EG* parallel sind, sind unter einander selbst parallel, auch wenn nicht alle drey in einer Ebene liegen.

Beweis. In der Ebene CDEG ziehe man ED, in der Ebene ABEG aber EB auf EG senkrecht, und lege durch BED die Ebene LM: so ist EG auf LM senkrecht (305 §). Also sind auch AB, und CD auf LM senkrecht (307 §). Folglich AB und CD einander parallel (308 §).

311 §.

141 Eine grade Linie AB ist mit einer Ebene EF pa-
F. rallel, oder gleichlaufend, wenn sie mit der Ebene nicht zusammenstossen kan, die Ebene und die Linie mögen so groß werden, als man will.

Wenn *AB* mit einer in der Ebene *EF* liegenden graden Linie *CD* parallel ist: so ist sie auch mit der Ebene *EF* parallel. Denn AB und CD bleiben allemal in einer Ebene, wenn also AB mit EF zusammenstiesse: so müste es in einem

Puncte

Puncte geschehen, der in beyden Ebenen ABCD und EF zugleich, also in beyder Durchschnitt CD liegt, welches wider die Voraussetzung ist.

312 §.

Wenn zweene Winkel *ACB*, *DEF* nicht in einer Ebene liegen, und ihre Schenkel *CA*, *ED*, imgleichen *CB*, *EF*, die in Absicht der durch die Spitzen gezogenen graden Linie *CE* nach einer Seite liegen, sind parallel: so sind die Winkel gleich groß. 142 F.

Beweis. Man nehme CA = ED, und CB = EF: so werden AD und BF beyde mit CE parallel, und = CE seyn (96 §). Also sind auch AD und BF parallel (310 §), und gleich groß. Demnach ist AB = DF, und ACB = DEF (64 §).

313 §.

Wenn eine Ebene CG die andre FH in der graden Linie AB schneidet: so schliessen beyde an der Durchschnittslinie AB einen Winkel ein, den man einen Flächen-Winkel nennen könnte. Man nehme in AB irgendwo einen Punct B und ziehe durch B auf AB ein paar senkrechte Linien BC, und BF, wovon eine BC in der einen Ebene CG, die andre BF in der andren Ebene FH liegt. Der Winkel CBF, den diese beyde Linien einschliessen, heist der Neigungs-Winkel der Ebenen CG und FH gegen einander. Er ist mit dem Flächen-Winkel an AB einerley, und wenn es ein rechter Winkel ist: so stehen die Ebenen CG, FH auf einander senkrecht. 137 F.

Dieser Winkel CBF ist nemlich bey unveränderter Lage beyder Ebenen gegen einander immer einerley, wo

man auch den Punct B in der Durchschnittslinie AB annimt. Man setze auch die Linien *bc* und *bf*, jene in CG, diese in FH auf AB senkrecht; so sind BC, *bc*, imgleichen BF, *bf* parallel (80 §) und der Winkel CBF = *cbf* (312 §).

Die Durchschnittslinie AB zwoer Ebenen CG, FH steht auf der Ebene ihres Neigungswinkels CBF senkrecht (305 §) und wenn eine Ebene LM die Durchschnittslinie AB in B senkrecht schneidet: so ist sie die Ebene des Neigungswinkels. Denn wenn CG von LM in BC, und FH von LM in BF geschnitten wird: so ist ABC = R = ABF (304 §).

143 F. Wenn eine Ebene AG eine andre LM in AD senkrecht schneidet: so läst sich durch AD keine von AG verschiedene Ebene AH auf LM senkrecht setzen. Denn legt man durch einen Punct B des Durchschnitts AD eine auf AD senkrechte Ebene, welche AG in BC, AH in BE, LM in BF schneidet: so müste CBF = R = EBF seyn, wenn AG und AH beyde auf LM senkrecht stünden, welches nicht seyn kan (21 §).

314 §.

145 F. Wenn von einem Punct *A* einer Ebene *DH*, welche eine andre *DG* in *CD* schneidet, auf *DG* das Loth *AB*, und überdem von *A* auf *CD* das Loth *AE* fällt: so ist *AE* auf *CD* auch senkrecht, und *AEB* der Neigungswinkel.

Auch umgekehrt: Wenn *AB* auf *DG* senkrecht ist, und von *A* auf *CD* das Loth *AE* fällt; so ist *AE* auf *CD* senkrecht, und wiederum *AEB* der Neigungswinkel.

Beweis des 1 S. Wenn BE nicht auf CD senkrecht ist: so sey es E*b*, und A*b* sey auf E*b* senkrecht:

recht: so ist *Ab* sowohl, als AB auf DG senkrecht (309 §) gegen den 305 §.

Beweis d. 2 S. Wenn AE nicht auf CD senkrecht ist: so sey es *Ae*, und *eβ* sey auf CD senkrecht: so sind *eβ* und EB parallel. Aber eine senkrechte Linie *Aβ* auf *eβ* ist auf DG senkrecht (309 §), worauf auch AB senkrecht seyn soll, welches wiederum nicht seyn kan (305 §).

315 §.

Wenn die grade Linie *BC* auf der Ebene *LM* senkrecht ist: so steht jede durch *BC* geleg- te Ebene *AG* auf *LM* ebenfalls senkrecht. 143 F.

Beweis. Die Ebene AG schneide LM in der graden Linie AD, und da diese durch B gehen muß: so setze man BF in der Ebene LM auf AD senkrecht. Weil nun BC auf LM senkrecht ist: so ist zuerst CBA = R (304 §). Also CBF der Ebene AG Neigungs-Winkel gegen LM (313 §). Es ist aber auch CBF = R (304 §). Also AG auf LM senkrecht (313 §).

Also stehen zwo Ebenen, die einander schneiden, auf der Ebene ihres Neigungswinkel senkrecht.

316 §.

Wenn eine Ebene AB, die andre AC in AD schnei- det: so kan man der Kürze wegen den Flächen- Winkel an AD, unter welchem die Ebenen einander schneiden, durch vier Buchstaben BADC bezeichnen, wovon die beyden mitlern A, D, an der Durchschnittslinie stehen. 144 F.

317 §.

Zweene gleich grosse Flächen-Winkel *BADC*, *KHLI* passen in einander. 144 F.

Beweis.

Beweis. In AD und HL nehme man die Puncte F und N willkührlich, und ziehe durch sie gehörig die Neigungswinkel EFG, MNO. Man lege die Ebene HI auf AC so, daß HL in AD, und N in F fällt: so muß NO in FG, und die Ebene MNO mit EFG zusammen fallen (313 §). Also fällt NM in FE (18 §) und die Ebene HNM oder HK fällt mit AFE oder AB zusammen (296 §).

318 §.

143 F. Eine grade Linie *BC* die in einer von zwoen senkrechten Ebenen *AG*, *LM* auf beyder Durchschnitt *AD* senkrecht ist, steht auch auf der andern Ebene *LM* senkrecht.

Beweis. In LM ziehe man BF auf AD senkrecht; so hat man den Neigungswinkel CBF = R (213 §). Da nun auch CBA = R: so steht CB auf LM senkrecht (305 §).

Eine senkrechte Linie von einem Punct C der Ebene AG auf die ihr senkrechte LM gezogen, muß in der Ebene AG liegen. Denn es sey CB auf dem Durchschnitt AD senkrecht. Fiele nun eine senkrechte Linie CK auf LM ausser der Ebene AG: so wären CB und CK beyde auf LM senkrecht, welches nicht seyn kan (305 §).

319 §.

137 F. Wenn zwo Ebenen *CG*, *FH* einander in *AB* schneiden, und auf einer dritten *LM* senkrecht sind: so ist auch ihr Durchschnitt *AB* auf *LM* senkrecht.

Beweis. In der Ebene LM ziehe man BK auf BC, und BI auf BF, beyder Ebenen Durchschnitte mit LM senkrecht: so ist BK auf CG, und BI auf

FH

FH senkrecht (318 §). Also ABK = R = ABI (304 §). Folglich AB auf LM senkrecht (305 §).

320 §.

Der Neigungswinkel einer graden Linie *AE* gegen eine Ebene *LM*, welche sie in E schneidet, ist der gradlinichte Winkel AEF, den die Durchschnittslinie EF einer durch AE auf LM senkrecht gesetzten Ebene mit AE einschliest. 140 F.

Läst man von einem Punct A der Linie AE auf LM das Loth AB fallen, und ziehet EB: so ist AEB der Linie AE Neigungswinkel gegen LM. Denn die Ebene AEB ist auf LM senkrecht, und schneidet sie in EB.

321 §.

Parallellinien *AE*, *QR* sind gegen einerley Ebene *LM* unter einerley Winkel geneigt. 140 F.

Beweis. Wenn AB, QP auf LM senkrecht stehen: so sind AEB, QRP die Neigungswinkel (320 §). Aber AB, und QP sind parallel (308 §) Also der Winkel A = Q (312 §). Folglich auch AEB = QRP (87 §).

322 §.

Eine grade Linie *ac*, oder *AB* kan nicht auf zwoen Ebenen *DG*, *DH*, die einander in *CD* schneiden, zugleich senkrecht seyn. 145 F.

Beweis. Die grade Linie *ac* gehe zuerst durch einen Punct E der Durchschnittslinie CD, und man ziehe EA in der einen Ebenen DH: so schneidet die Ebene des Winkels AE*a* auch die andre Ebene DG in einer graden Linie EB. Wäre nun *ab* auf beyden Ebenen zugleich senkrecht: so wäre AE*a* = R = BE*a*, welches unmöglich ist (21 §).

Geht nun AB nicht durch CD: so ziehe man von einem Punct E in dieser Linie CD sowohl nach A, als B, grade Linien; dies giebt ein Dreyeck ABE, worin sowohl bey A, als auch bey B ein rechter Winkel ist, welches dem 72 § widerspricht.

323 §.

146 F. Zwo Ebenen KL, MN, die eine solche Lage haben, daß sie nicht zusammenstossen können, sie mögen nach allen Seiten, so weit man will, erweitert werden, heissen parallele Ebenen.

Wenn eine grade Linie *AB* auf zwoen Ebenen *KL*, *MN* zugleich senkrecht stehet: so sind *KL*, *MN* einander parallel. Denn sie können einander nicht schneiden (322 §).

Wenn demnach ausser der Ebene MN ein Punct A gegeben ist: so kan man durch A auf folgende Art eine Ebene mit MN parallel legen. Man lasse von A auf MN die senkrechte Linie AB fallen, ziehe durch B in der Ebene MN ein paar grade Linien BC, BD, und mit ihnen durch A die parallelen AE, AF. Durch den Winkel EAF lege man die Ebene KL: so ist KL mit MN parallel. Denn es ist BAE = R = BAF, also AB auf beyden Ebenen MN, KL senkrecht.

Wenn zwo parallele Ebenen KL, MN von einer dritten BE geschnitten werden: so sind die Durchschnittslinien AE, BC parallel, denn sie liegen in der schneidenden Ebene, und können nicht zusammen stossen, weil sonst KL mit MN zusammenstiesse, welches der Voraussetzung entgegen ist.

324 §.

146 F. Die Ebenen *KL*, *MN* zweener Winkel *EAF*, *OPQ*

OPQ sind parallel, wenn die Schenkel *AE*, *PO*, und *AF*, *PQ* dieser Winkel parallel sind.

Beweis. Von A falle auf MN das Loth AB, und durch B sey BC mit PO, und BD mit PQ parallel gezogen: so ist auch BC mit AE, und BD mit AF parallel (310 §). Also ist BAF = 2R − ABD = R = 2R − ABC = BAE (83 §), und AB auf KL senkrecht (305 §), folglich KL mit MN parallel (323).

325 §.

Wenn die Ebene *KL* mit *MN* parallel ist, und es fällt von einem Punct *A* dieser Ebene *KL* auf *MN* die senkrechte Linie *AB*: so ist *AB* auch auf *KL* senkrecht. 146 F.

Beweis. Durch B ziehe man ein paar grade Linien BC, BD in der Ebene MN: so schneiden die Ebenen ABC, ABD auch KL in AE und AF, und es wird AE mit BC und AF mit BD parallel (323 §). Demnach ist BAE = 2R − ABC = R, und BAF = 2R − ABD = R (83 §), folglich AB auf KL senkrecht.

Durch einen gegebenen Punct A läst sich nicht mehr als eine Ebene KL mit MN parallel legen, denn sonst stünde AB auf beyden Ebenen senkrecht, gegen den 322 §.

Eine Ebene also, die eine von zwoen parallelen Ebenen schneidet, schneidet auch die andre, und zwo Ebenen, die mit einer dritten parallel sind, müssen untereinander selbst parallel seyn. Denn schnitten jene beyde einander: so schnitte jede von ihnen die dritte, womit sie parallel seyn soll.

326 §.

Eine grade Linie *CD*, die eine von zwoen 147 F.

parallelen Ebenen *KL* schneidet, trift verlängert auch die andre *MN*, und ist gegen beyde unter einerley Winkel geneigt.

Beweis. Wenn CD die Ebene KL in A schneidet, und AB auf MN senkrecht gezogen ist: so steht AB auch auf KL senkrecht (325 §). Die Ebene DAB also, welche KL in AF, und MN in BE schneidet, ist sowol auf KL, als MN senkrecht (315 §), und AF, BE sind Parallellinien (323 §). Demnach schneiden CD und EB einander (82 §), folglich auch CD und MN. Wenn nun E der Durchschnitts-Punct ist: so ist CA gegen KL unter dem Winkel CAF, gegen MN aber, unter dem Winkel AEB geneigt (320 §), und es ist CAF = AEB (84 §).

327 §.

146 F. Parallele Ebenen *KL*, *MN*, sind durchgängig gleich weit von einander entfernt.

Beweis. Wenn AB und EC die Entfernungen der Puncte A und E von MN sind: so sind AB, EC parallel (308 §), und die Durchschnitte AE, BC der Ebenen KL, MN mit der Ebene AECB sind auch parallel (323 §), also AB = EC. Eben so erhellet, daß eines jeden andern Puncts F in der Ebene KL Entfernung von MN = AB sey.

Wenn eine grade Linie AE durch A mit MN parallel ist: so liegt sie in der mit MN durch A parallelen Ebene KL. Denn schnitte sie KL: so schnitte sie auch MN (326 §). Also ist auch AE durchgängig gleich weit von MN entfernt.

Wenn drey Puncte A, E, F von der Ebene MN gleich weit entfernt sind: so ist die Ebene KL durch A, E und F mit MN parallel. Denn die gleichen

Ent-

Entfernungen AB, EC, FD sind auch parallel (308 §). Zieht man also AE, AF, BC, BD: so sind ABCE, ABDF rechtwinklichte Parallelogrammen (96, 97 §), und AB ist auf KL senkrecht (305 §), also KL mit MN parallel.

Alle Puncte A, E, F, G, u. s. f., die von der Ebene MN gleich weit entfernt sind, liegen in einer Ebene. Denn es sey AB = EC = FD = GH: so muß eine Ebene KL durch A, E und F, auch durch G gehen. Im Gegentheil würde KL doch mit MN parallel seyn, und GH irgendwo in I schneiden (326 §), so, daß IH = AB; aber es soll GH = AB seyn, also wäre IH = GH, welches nicht seyn kan.

328 §

Zwo grade Linien *AB, CD*, werden von drey- 148
en parallelen Ebenen *HI, KL, MN*, in pro- F.
portionale Theile geschnitten.

Beweis. Wenn A, E, B und C, F, D die Durchschnittspuncte sind: so ziehe man BC, welche KL in G schneidet. Die Ebene ABC wird HI in AC, und KL in EG schneiden, so wie die Ebene BCD von KL in GF und von MN in BD geschnitten wird. Da nun AC und EG, imgleichen BD und GF parallel sind (323 §): so ist AE:EB = CG:GB, und CG:GB = CF:FD (203 §). Also AE:EB = CF:FD.

Aus dieser Proportion folget auch AB:EB = CD:FD, und AB:AE = CD:CF (323 §).

329 §.

Parallele Ebenen *KL, MN* werden von ei- 149
ner dritten Ebene *PQ* unter gleichen Neigungs- F.
winkeln auf eben der Seite von *PQ* geschnitten.

Beweis. Die Durchschnitte AB, CD sind parallel (323 §). Man lege durch einen Punct F von AB eine Ebene auf AB senkrecht, welche PQ in FE, und KL in FH schneidet: so ist EFH der Neigungswinkel der Ebene PQ gegen KL (313 §). Aber EF trift verlängert auch CD in G (85 §), also schneidet die Ebene EFH auch CD, und zwar senkrecht (307 §) und wenn GI ihr Durchschnitt mit MN ist: so ist FGI der Ebene PQ Neigungswinkel gegen MN. Ueberdem sind FH, GI parallel (323 §). Also EFH = FGI (84 §).

330 §.

149 F. Wenn zwo Ebenen *KL*, *MN* von einer dritten *PQ* so geschnitten werden, daß die Durchschnitte *AB*, *CD* parallel, und die Neigungswinkel gegen *KL*, *MN* auf eben der Seite von *PQ* gleich groß sind: so sind *KL*, und *MN* parallel.

Beweis. Es sey EFH der Ebene PQ Neigungswinkel gegen KL: so ist die Ebene EFH auf AB senkrecht (313 §) und schneidet auch CD in G, wo EF verlängert CD trift (85 §), und zwar senkrecht (307 §). Wenn also GI der Ebene EFH Durchschnitt mit MN ist: so ist FGI der Ebene PQ Neigungswinkel gegen MN, und vermöge der Voraussetzung EFH = FGI. Also ist FH mit GI parallel, und weil auch AB mit CD parallel ist: so ist die Ebene KL mit MN parallel (324 §).

Der XIII. Abschnitt.

Von den Prismatischen Körpern und Pyramiden.

331 §.

Wenn mehr, als zwo Parallellinien AF, BG, CH, DI, EK, u. s. f. zwischen zwoen Parallelen Ebenen LM, NO stehen: so schliessen die Linien AB, BC, u. s. f. imgleichen FG, GH u. s. f. worin die Ebenen jeder zwoen nach einander folgenden Parallelen, die Ebenen LM, NO schneiden, ein paar ebene Figuren ABCDE, und FGHIK ein, alle diese Ebenen zusammen aber begränzen einen Körper AH, der ein **Prisma** oder **Pfeiler**, oder **Eckſäule** heist. Die Ebenen der Parallellinien AF und BI, BG und CH, u. s. f. heissen seine Seitenflächen. Die parallelen Figuren ABCDE, FGHIK aber die **Grundflächen** des Prisma. 150 F.

Weil AB und FG, BC, und GH u. s. f. Parallellinien sind (323 §): so folgt, daß die Seitenflächen eines jeden Prisma, Parallelogrammen sind.

Demnach sind die Grundflächen ABCDE, FGHIK gleiche und ähnliche Figuren. Es ist nemlich $AB = FG$, $BC = GH$, u. s. f. Ueberdem der Winkel $ABC = FGH$, $BCD = GHI$ u. s. f. (312 §).

Also wird auch die Durchschnitts-Figur allemahl den Grundflächen gleich und ähnlich seyn, wenn man ein Prisma mit einer den Grundflächen parallelen Ebene schneidet.

Jedes Prisma hat so viel Seitenflächen, als die Grundfläche Seitenlinien hat. Man giebt ihnen daher die Nahmen: dreyseitige, vierseitige, fünfseitige Prismata, u. s. f. von der Anzahl ihrer Seitenflächen.

332 §.

Wenn die Parallellinien AF, BG, u. s. f. also auch die Seitenflächen senkrecht auf den Grundflächen stehen (315 §): so heist der Körper ein grades, widrigenfalls aber ein schiefes Prisma.

Die Seitenflächen eines graden Prisma sind also Rechtecke.

333 §.

151 F. Ein Parallelepipedum ist ein Prisma, dessen Grundflächen ABCD, EFGH Parallelogrammen sind.

Demnach liegen jede zwo entgegen gesetzte Seitenflächen, wie AH, BG einander parallel, weil AD mit BC, und AE mit BF parallel ist (324 §).

Also können jede zwo entgegen gesetzte Seitenflächen, wie AH, BG, für die Grundflächen des Parallelepipedi angenommen werden, da dann die Grundflächen AC, EG Seitenflächen werden.

335 §.

151 F. Ein rechtwinklichtes Parallelepipedum ist ein grades Parallelepipedum, dessen Grundflächen AC, EG Rechtecke sind. Es können also die Grundflächen Quadrate seyn, und weil die Seitenflächen Rechtecke sind (332 §): so werden sie ebenfalls Quadrate, wenn die Entfernung der Grundflächen von einander ihrer Seitenlinie gleich ist.

Ein

Ein rechtwinklichtes Parallelepipedum von dieser Art, welches also von sechs gleich grossen Quadraten eingeschlossen ist, heist ein **Würfel**. Die Seitenlinie von jeder Seitenfläche heist zugleich eine **Seitenlinie des Würfels.**

335 §.

Die Höhe des Prisma ist die Entfernung der einen Grundfläche von der andern. Daher kan im rechtwinklichten Parallelepipedo eine jede Seitenlinie die Höhe seyn, weil man jedes Paar der entgegen gesetzten Seitenflächen als die Grundflächen ansehen kan.

336 §.

Wenn zwey Prismata nebst gleichen Höhen gleiche und ähnliche Grundflächen haben, und überdem ihre gleichnahmichten Seitenflächen (das ist, diejenigen, welche die Grundflächen in gleichnahmichten Seitenlinien schneiden) gegen die Grundflächen unter gleichen Winkeln geneigt sind: so sind die Prismata gleich groß.

Beweis. Denn die Grundflächen passen auf einander. Und wenn man diese gehörig auf einander legt: so fällt jedes Paar gleichnahmichter Seitenflächen zusammen (317 §). Auch fallen die Ebenen der entgegen gesetzten Grundflächen zusammen (327 §). Demnach müssen auch die Durchschnittslinien dieser letzten Ebenen, und der Seitenflächen, und also die entgegen gesetzten Grundflächen selbst zusammen fallen. Also past ein Prisma in dem andern (16 §), und beyde sind gleich groß.

Würfel also, deren Seitenlinien gleich groß sind, sind selbst gleich groß. Von zweenen Würfeln aber, mit ungleichen Seitenlinien, ist derjenige der größere, der die größere Seitenlinie hat.

Gleich große Würfel haben demnach gleich große Seitenlinien, und von ungleichen Würfeln hat der größere eine größere Seitenlinie, als der kleinere.

337 §.

152 F. Wenn ein Punct A ausser der Ebene einer gradlichten Figur BCDEF liegt, und es sind von A nach allen Winkelspitzen dieser Figur grade Linien AB, AC u. s. f. gezogen: so schliessen die Ebenen der Dreyecke ABC, ACD u. s. f. mit der Ebene der Figur BCDEF einen Körper ein, der eine **Pyramide**, oder **Spitzsäule** genannt wird. Der Punct A heist der Pyramide Spitze, die Figur BCDEF ihre Grundfläche, die Dreyecke ABC, ACD, u. s. f. ihre Seitenflächen.

Jede Pyramide hat demnach so viele Seitenflächen, als die Grundfläche Seitenlinien hat. Daher erhellet leicht, was dreyseitige, vierseitige, fünfseitige Pyramiden sind, u. s. f. Wenn die Grundfläche auch ein Dreyeck, und also die Pyramide dreyseitig ist: so kan jede Seitenfläche als die Grundfläche angesehen werden.

Die Entfernung der Spitze einer Pyramide von ihrer Grundfläche heist ihre **Höhe**.

338 §.

Wenn Pyramiden gleiche und ähnliche Grundflächen haben, und überdem alle gleichnahmichte Seitenflächen gegen die Grundflächen

chen unter einerley Winkel geneigt sind: so sind sie gleich groß.

Beweis. Die Grundflächen passen auf einander, und wenn man sie gehörig auf einander legt: so fallen die Ebenen jeder zwoen gleichnahmichten Seitenflächen zusammen (317 §). Also alle Seitenlinien (297 §), und dieserwegen auch die Spitzen der Pyramiden. Also passen die Pyramiden in ander, und sind gleich groß.

339 §.

Wenn man ein Parallelepipedum *AB* mit einer Ebene *CD* schneidet, die zwoen Seitenflächen *AE*, *BF* parallel liegt: so verhält sich das abgeschnittene Parallelepipedum *AC* zum ganzen *AB*, wie die Grundfläche des ersten *AK* zur Grundfläche des zweyten *AL*. 153 F.

Beweis. Wenn AF eine von den Seitenlinien ist, welche die Seitenflächen AE, BF schneiden; so wird eben diese Linie auch von CD irgendwo in D geschnitten. Wenn nun AD und AF commensurabel sind: so sey AG ihr gemeinschaftliches Maaß. Dies trage man auf AF so oft auf, als es angehet, und man setze, es werde $AD = nAG$, und $AF = mAG$. Durch alle Theilungspuncte in AF lege man Ebenen mit CD parallel, davon eine GH sey: so wird AC in n Parallelepipeda, und AB in m Parallelepipeda getheilt, wovon jedes $= AH$ ist (336 §), so, daß man $AC = nAH$, und $AB = mAH$ erhält. Aber aus dem 172 § folgt, es sey $nAH : mAH = nAG : mAG$, oder $AC : AB = AD : AF$.

Dafern AD und AF incommensurabel sind: so theile man AF in eine beliebige Menge gleicher Thei-

le, so, daß AF = *m*AG sey, und es wird D allemal zwischen zweenen Theilungspuncten fallen. Wenn dies der *n*te, und (*n* + 1)te Theilungspunct ist: so wird auch CD zwischen der *n*ten, und (*n* + 1)ten Theilungs-Ebene fallen. Demnach fallen sowol AD, als auch AC zwischen ein paar rationalen Grenzen, die gegen AF und AB einerley Verhältniß haben. Also folgt aus dem 175 §, es sey auch in diesem Fall AC:AB = AD:AF. Da nun AD:AF = AK:AL: so ist auch AC:AB = AK:AL.

Auch die abgeschnittenen Stücke AC, DB verhalten sich wie ihre Grundflächen AK, DL. Denn vermöge des Beweises ist AC:AB = AK:AL, und AB:DB = AL:DL. Also AC:DB = AK:DL (171 §).

340 §.

154 F. Wenn zwey Parallelepipeda *ABCDEFGH*, und *ABCDIKLM* auf einer Grundfläche *ABCD* in gleicher Höhe so stehen, daß zwo entgegen gesetzte Seitenflächen des einen mit zwoen gleichnahmichten Seitenflächen des andern in eine Ebene fallen: so sind beyde Parallelepipeda gleich groß.

Beweis. Weil die Höhen beyder Körper gleich sind: so fallen die Grundflächen EFGH, und IKLM in eine Ebene HK (327 §). Wenn nun die Seitenflächen ABFE, ABKI, imgleichen CDHG, DCLM in einer Ebene liegen: so liegen die Puncte E, F, I, K in grader Linie, so, wie die Puncte H, G, M, L. Denn jene liegen in beyden Ebenen ABKE und HK, diese in beyden Ebenen DCLH und HK zugleich, also in beyder Durchschnitt. Ueberdem sind EH und IM mit AD, imgleichen FG und KL mit BC; also

sowohl jene, als auch diese beyde Linien unter sich parallel (310 §). Demnach sind die Körper AEIDHM und BFKCGL dreyseitige Prismata (331 §). Ihre Grundflächen DHM und CGL sind gleich und ähnlich (54 §), weil DH = CG, DM = CL, und der Winkel HDM = GOM = GCL (84 §). Beyde Prismata stehen zwischen parallelen Ebenen ABKE, DCLH, und sind also gleich hoch (327 §). Ihre Seitenflächen ADHE und BCGF, ADMI und BCLK, EHMI und FGLK sind gegen die Grundflächen unter gleichen Winkeln geneigt (329 §). Also ist das Prisma AEIDHM = BFKCGL (336 §). Man nehme von beyden das Stück FNIGOM ab, so bleibt gleiches übrig, nemlich AEFNDHGO = BNIKCOML. Zu jedem dieser gleichen Körper setze man das Stück ANBDOC: so hat man gleiche Summen, oder ABCDEFGH = ABCDIKLM.

In der Ebene ADMI ziehe man die grade Linie AP, welche MI in P schneidet, und durch D mit AP die Parallele DQ, welche ebenfalls in der Ebene ADMI fällt, und IM in Q schneidet. Die Ebene BAP schneide BCLK in BR: so ist BR mit AP parallel (323 §), also auch mit DQ (310 §). Ueberdem werde CBKL von der Ebene CDQ in CS geschnitten: so ist CS mit DQ (323 §), also auch mit AP und BR parallel. Da nun die Ebene IKLM von BAPR in PR, und von CDQS in QS geschnitten wird: so wird ABCDPQRS ein neues Parallelepipedum (333 §), auf eben der Grundfläche ABCD mit dem Parallelepido ABCDIKLM und die Seitenflächen ADMI, ADQP fallen in eine Ebene, so wie BCLK und BCSR. Demnach ist vermöge des Beweises ABCDIKLM = ABCDPQRS.

Hieraus folgt der allgemeine Satz: Jede zwey Parallelepipeda *ABCDEFGH* und *ABCDPQRS* auf eben der Grundfläche *ABCD* in gleicher Höhe, sind gleich groß. Denn es giebt allemahl auf eben der Grundfläche ein drittes Parallelepipedum ABCDIKLM, worin zwo entgegen gesetzte Seitenflächen ABKI, DCLM mit zwoen gleichnahmichten Seitenflächen ABFE, DCGH des einen, und die beyden übrigen Seitenflächen ADMI, BCLH mit zwoen gleichnahmichten Seitenflächen ADQP, BCSR des andern zusammen fallen. Demnach sind beyde Parallelepipeda ABCDEFGH und ABCDPQRS eben demselben dritten ABCDIKLM gleich, folglich unter sich gleich groß.

341 §.

155 F. Grade Parallelepipeda *AP*, *CQ* auf gleichen, obgleich unähnlichen Grundflächen *AB*, *CD* in gleicher Höhe, sind gleich groß.

Beweis. Man verlängere eine Seitenlinie CE der Grundfläche CD, bis EF = LB ist. An EF setze man in der Ebene CD den Winkel FEG = BLA, und mache EG = LA. Durch F sey FH mit EG, und durch G sey GH mit EF parallel: so ist das Parallelogramm EFHG dem Parallelogramm AB gleich und ähnlich, also auch EFHG = CD. Weil nun ES auf der Grundfläche senkrecht ist: so ziehe man durch F, H, G mit ES Parallelen FT, HV, GX. Diese werden die Ebene QR in T, V, X treffen, so, daß EHVS ein rechtwinklichtes Parallelepipedum wird (331. 333 §), dessen Seitenfläche EFTS in der Ebene CRSE fällt, und es dieses Parallelepipedum EHVS = AP (336 §).

Nun

Nun stosse DE mit HG in I, und eine durch F mit DI parallel gezogenen Linie KM stosse mit HG in M, mit ND in K zusammen. Durch K sey KW mit DQ parallel, und treffe die Ebene QR in W; so fällt W in die Ebene QN, und man erhält ein Parallelep. CKWR, welches mit der Ebene EQ den Seitenflächen RN und FW parallel geschnitten ist. Sind nun noch IY und MZ durch I und M mit ES parallel: so giebt sich ein Parallelep. EFTSIMZY, welches mit dem Parallelep. EFHGSTVX auf einerley Grundfläche EFTS in gleicher Höhe steht. Demnach sind beyde gleich groß, und deswegen ist auch das Parallelep. EFTSIMZY = AP. Weil nun das Parallelogramm EFHG = EFMI (205 §), und EFHG = CD: so ist auch EFMI = CD. Dies giebt die Proportion EFMI: EDKF = CD: EDKF (158 §). Weil nun Ppp. IT: Ppp. EW = EFMI: EDKF, Ppp CQ: Ppp. EW = CD: EDKF (339 §): so wird Ppp. IT: Ppp. EW = Ppp CQ: Ppp EW, folglich Ppp. IT = Ppp. CQ (162 §). Nun war Ppp IT, oder EFTSIMZY = Ppp AP. Demnach ist auch das Ppp AP = Ppp CQ.

342 §.

Jede zwey Parallelepipeda auf gleichen, obgleich unähnlichen Grundflächen in gleichen Höhen, sind gleich groß.

Beweis. Wenn beyde grade sind: so ist der Satz im vor. § erwiesen. Ist eins schief: so setze man auf eben der Grundfläche ein grades in gleicher Höhe. Dies ist dem schiefen (340 §), und dem andern graden (341 §); folglich auch dies letzte dem schiefen gleich. Sind beyde schief: so setze man auf eines jeden Grundfläche ein grades in eben der Höhe:

so

so sind beyde grade gleich (341 §) auch ist jedes grade den zugehörigen schiefen gleich (340 §), also sind auch beyde schiefe gleich groß.

343 §.

Jedes dreyseitige Prisma ist die Hälfte eines Parallelepipedi, das mit ihm eine gleiche Höhe, und eine doppelt so grosse Grundfläche hat.

156 F. Beweis. Wenn ABC und DEF die Grundflächen des Prisma sind: so ziehe man AG mit BC, CG mit AB, imgleichen DH mit EF, FH mit DE parallel: so werden BG und EH Parallelogrammen. Demnach werden CG und FH gleich und parallel, also auch GH mit CF, folglich mit BE und AD parallel. Dieserwegen wird ABCDGDEFH ein Parallelepipedum, dessen Grundfläche doppelt so groß, als des Prisma Grundfläche, die Höhe aber so groß, als des Prisma Höhe ist. Es ist aber ACGDFH ein dreyseitiges Prisma, und daß dies dem vorigen ABCDEF gleich sey, erhellet so. Man kehre das Prisma ACGDFH um, und lege GH auf BE so, daß G auf B, und H auf E, die Ebene GADH aber auf BCFE: so fällt AD zwar auf CF (95 §) aber A kann nicht auf C, und D in F fallen, ohne nur in dem Fall, wenn beyde Prismen senkrecht sind. Es falle also A in *a*, und D in *d*: so wird $Ca = Fd$ (28 §. R.). Ferner fällt die Ebene GCFH in BADE (317 §) und CF zwar in AD, jedoch dafern die Prismen nicht senkrecht sind, C und F nicht in A und D; sondern C in *c*, und F in *f* so, daß $Ac = Df$ wird. Also ist die vierseitige Figur AC*ac* der Figur DF*df* gleich, und ähnlich. Beyde Figuren sind Grundflächen von Pyramiden, deren Spitzen in B und E liegen. Aber die Seitenflächen

dieser

dieser Pyramiden ABC und EDF, BC*a* und EF*d*, B*ac* und E*df*, AB*c* und ED*f* sind gegen die Grundflächen in gleichen Winkeln geneigt; demnach ist BAC*ac* = EDF*df* (338 §). Man setze zu beyden das Stück B*ca*EDF: so wird ABCEDF = B*ca*E*df* = GCAHDF. Also ist ABCDEF die Hälfte des Ppp. EG, folglich eines jeden andern so mit EG eine gleiche Grundfläche, und gleiche Höhe hat (342 §).

Also sind die dreyseitige Prismen gleich groß, wenn sie gleiche Grundflächen und Höhen haben.

Die Diagonalfläche ACFD theilt jedes Parallelepipedum EG in zwo gleiche dreyseitige Prismen, die aber nur alsdenn ineinander passen, wenn EG ein grades Parallelepipedum ist.

344 §.

Zwey Parallelepipeda *P* und π von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundflächen *B* und *b*.

Beweis. Man nehme zuerst ein paar rechtwinklichte Parallelepipeda AC, und DF, deren Grundflächen AB und DE ihre gleich grossen Höhen BC und EF sind. Man verlängere die eine Seitenlinie AG der Grundfläche AB nach H, und setze an GB ein rechtwinklichtes Parallelogramm BGHI, welches so groß ist, als DE (248 §). Durch H und I ziehe man mit BC Parallelen: so fällt KL in die Ebene AM, IK in die Ebene BN, und man erhält ein Parallelepipedum GK = DF. Es ist aber Ppp. AC: Ppp. GK = AB: GI (339 §). Also auch Ppp. AC: Ppp. DF = AB: DE

Nun kan man aber statt jeder zweyer andrer Parallelepipeden P und π deren Grundflächen B und *b* sind,

sind, und deren gleiche Höhe A ist, ein paar rechtwinklichte AC, DF verzeichnen, deren Höhe BC = EF = R, und des einen Grundfläche AB = B, des andern Grundfläche DE = *b* (342 §) sodann ist AC = P, und DF = π. Folglich auch P : π = B : *b*.

Demnach verhalten sich auch dreyseitige Prismen wie ihre Grundflächen, wenn ihre Höhen gleich sind (343 und 181 §).

Auch ist jedes dreyseitige Prisma einem Parallelepipedo gleich, das mit demselben eine gleiche Grundfläche und Höhe hat.

345 §.

158 Jedes vielseitige Prisma *BGKE* verhält sich F. zum dreyseitigen *LMNOPQ* von gleicher Höhe wie des ersten Grundfläche zur Grundfläche des letztern.

Beweis. Man theile die Grundflächen ABCDE, FGHIK durch gleichnahmichte Diagonalen AC und FH, AD und FI, u. s. f. in Dreyecke; so werden jede zwo gleichnahmichte Diagonalen einander parallel (96 §) und die Diagonalflächen ACHF, ADIF u. s. f. theilen das ganze Prisma in so viel dreyseitige von eben der Höhe, in so viel Dreyecke die Grundflächen getheilt sind. Nun setze man der Kürze wegen das dreyseitige Prisma LMNOPQ = π, seine Grundfläche LMN = β. Man setze ferner die Dreyecke ABC = *a*, ACD = *b*, ADE = *c*, und bezeichne die zu diesen Grundflächen gehörigen Prismen mit P, Q, R: so hat man aus dem (344 §) P : π = *a* : β, Q : π = *b* : β. R : π = *c* : β, u. s. f. Also P + Q + R : π = *a* + *b* + *c* : β (197 §). Oder Pr. BGKE : Pr. π = ABCDE : β.

Dem-

Demnach ist ein vielseitiges Prisma einem dreyseitigen gleich, das mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat; und eben deswegen sind alle Prismen, die gleiche Grundflächen und Höhen haben, gleich groß. Auch verhalten sich überhaupt ein paar Prismen, wie ihre Grundflächen, wenn die Höhen gleich sind (344 §.)

346 §.

Zwey Prismen verhaleen sich wie ihre Höhen, wenn die Grundflächen gleich sind.

Beweis. Man vergleiche zuerst ein paar rechtwinklichte Parallelepipeda AC, DF, die auf gleichen und ähnlichen Grundflächen AB, DE, stehen so, daß AG = DH, und GB = HE sey. Die Höhe des ersten sey BC, die Höhe des andern EF. Sieht man nun die Seitenflächen GC und HF als die Grundflächen an: so sind die Höhen AG und DH gleich, und man hat Ppp. AC : Ppp. DF = GC : FH (345 §). Es ist aber GC : FH = BC : EF (245 §). Also Ppp. AC : Ppp. DF = BC : EF. Wenn nun überhaupt ein Prisma P die Höhe A, ein andres π die Höhe a hat, und beyder Grundflächen gleich sind: so kan man allemahl ein paar gleiche und ähnliche Rechtecke AB, DE zeichnen, die so groß, als jene Grundflächen sind (110 §) Setzt man nun auf AB ein rechtwinklichtes Parallelep. AC in der Höhe BC = A auf DE, ein andres DF in der Höhe EF = a: so ist AC = P, und DF = π (345 §). Folglich auch P : π = A : a. 159 F.

347 §.

Das Verhältniß zweyer Prismen ist aus den Verhältnissen ihrer Grundflächen und Höhen zusammengesetzt.

Be-

Beweis. Des einen Prisma P Grundfläche sey B, und Höhe A, des andern p Grundfläche b, und Höhe a: so kan man ein drittes Prisma π machen, dessen Grundfläche b, und Höhe A ist. Nun hat man

$$P:\pi = B:b \text{ (345 §)}.$$
$$\pi:p = A:a \text{ (346 §)}.$$

Also ist $P:p = \begin{pmatrix} B:b \\ A:a \end{pmatrix}$ (232 §).

Hat man statt P und p ein paar Würfel C, c und ist L des ersten, l des zweyten Seitenlinie: so ist des ersten Höhe L, des zweyten l. Also hat man $C:c = \begin{pmatrix} B:b \\ L:l \end{pmatrix}$.

Aber B und b sind Quadrate, und L, l ihre Seiten. Also ist $B:b = \begin{pmatrix} L:l \\ L:l \end{pmatrix}$ (247 §). Folglich wird

$$C:c = \begin{pmatrix} L:l \\ L:l \\ L:l \end{pmatrix}$$

oder das Verhältniß zweener Würfel ist dreymahl so groß, als das Verhältniß ihrer Seiten (ratio triplicata laterum).

348 §.

Weil $\begin{pmatrix} B:b \\ A:a \end{pmatrix} = B \times A : b \times a$ (243 §): so ist auch $P:p = B \times A : b \times a$, oder zwey Prismen verhalten sich wie die Producte aus ihren Grundflächen und Höhen.

Dafern uun $B:b = a:A$: so ist $B \times A = b \times a$ (199 §). Wenn also die Grundflächen sich umgekehrt, wie die Höhen verhalten: so sind die Prismen gleich. Auch umgekehrt: wenn zwey Prismen gleich sind:

sind: so verhalten sich die Grundflächen umgekehrt, wie die Höhen.

349 §.

Den körperlichen Inhalt eines Prisma auszurechnen, wenn man den Inhalt der Grundfläche *B*, und die Höhe *A* weis.

Aufl. Man muß einen andern Körper von bekannter Größe für das Maaß annehmen, und prüfen, wie oft derselbe entweder ganz, oder ein aliquoter Theil von ihm in dem Prisma P enthalten sey. Hiezu erwählet man einen Würfel C, dessen Seite L so lang ist, als eines von den im 261 § erklärten Maassen, z. E. ein Fuß, eine Ruthe, u. s. f. Der Würfel C erhält den Nahmen von diesem Längen-Maasse, dem die Seite desselben gleich genommen wird. Er heist eine Cubic-Ruthe, ein Cubic-Fuß, u. s. f. nachdem seine Seite eine Ruthe, einen Fuß lang ist, u. s. f. Wenn nun die Grundfläche des Prisma nach dem Quadratmaaß in Zahlen gegeben ist, wobey die Seitenfläche des Würfels die Einheit ist: so ist des Würfels Grundfläche $= L.L$, und

$$C:P = L.L \times L:B \times A \text{ (348 §)},$$

oder $C:P = 1:B \times A$, weil $L = 1$ ist.

Also ist der Würfel C im Prisma P so oft enthalten, als das Product $B \times A$ ausdrückt, und man hat den körperlichen Inhalt des Prisma, wenn man die Grundfläche mit der Höhe multiplicirt.

Es sey B = 582, 374 Q. R.
A = = 6, 253 R.

1747122
2911870
1164748
3494244

so wird P = 3641, 584622 Cub. R.

350 §.

Die Würfel selbst sind Prismen, und wenn eines Würfels Seite durch die Zahl λ ausgedrückt ist: so ist seine Grundfläche = λ. λ (277 §), seine Höhe = λ. Also sein Inhalt = λλλ = λ^3. Wenn man demnach ein Product dreyer Factoren macht, wovon jeder die Seite des Würfels ausdrückt: so ergiebt dies Product, wie vielmal ein Würfel, dessen Seite = 1 ist, in dem gegebenen enthalten sey. Dies ist der Ursprung des Namens einer Cubic-Zahl (180 §. Rechenk.).

Eine Cubic-Ruthe enthält also 1000 Cubic-Fuß, ein Cubic-Fuß 1000 Cubic-Zoll, ein Cubic-Zoll 1000 Cubic-Linien, u. s. f. wenn beym Längenmaasse die Decimal-Abtheilung gebraucht worden. Und dies bestimt die Werthe der Decimal-Zahlen, die an einer Zahl hängen, welche den Inhalt eines Körpers ausdrückt. Im vorigen § fand man das Parallelepipedum P = 3641, 584622 Cub. R. Aber nach dem 147 §. der Rech. sind 0, 584622 Cub. R. = 0, 584622 × 1000 Cub. Fuß = 584, 622 Cub. F., und 0, 622 Cub. F. = 0, 622 × 1000 Cub. Zoll = 622 Cub. Z. Also ist P = 3641 C. R. 584 C. F. 622 Cub. Zoll groß.

Dem-

Demnach kan man jedesmahl die an einer Zahl von dieser Art hängende Decimal-Zahl von der Linken gegen die Rechte in Classen so eintheilen, daß jede Classe 3 Ziffern bekomt, da man denn in der letzten eine, oder zwo Nullen zusetzt, wenn nur eine, oder zwo Ziffern in dieselbe kämen. Nun werden diese Classen Cubic-Fuße, Cubic-Zoll, Cubic-Linien u. s. f. nach einander bedeuten, wenn die Einheit eine Cubic-Ruthe ist. Man sieht auch leicht, wie sich dies ändre, wenn die Einheit ein Cubic-Fuß, Cubic-Zoll, u. s. f. ist.

351 §.

Nach dem Duodecimal-Maaß hält eine Cubic-Ruthe 1728 Cubic-Fuß, ein Cubic-Fuß 1728 Cubic-Zoll u. s. f. Also kan man leicht Decimal-Cubic-Maaß auf Duodecimal-Cubic-Maaß, und umgekehrt, dieses auf jenes bringen. Frägt man: 584 Cub. F. 622 Cub. Zoll, wie viel sind es Cubic-Fuß und Cubic-Zoll nach der Duodecimal-Abtheilung? vorausgesetzt, daß die Ruthe für beyde Abtheilungen einerley sey: so weis man, daß 584 Cubic-Fuß 622 Cubic-Zoll $= \frac{584622}{1000000}$ Cubic-Ruthen sey. Demnach setzt man $\frac{584622}{1000000}$ Cub. R. $= 0,584622 \times$ 1728 Duodec. Cubic-Fuß: so erhält man 1010, 226816 Duod. Cub. F. Man erhält auf eben die Art $0,226816$ Duod. C. F. $= 0,226816 \times 1728$ Duod. Cub. Z. $= 391,938028$ Duod. Cubic-Zoll, u. s. f.

352 §.

Wenn eine Ebene die Pyramide *ABCDEF* mit der Grundfläche parallel schneidet: so ist die Durchschnitts-Figur *GHIKL* der Grund- 152 F.

Fläche ähnlich, und die Flächen-Inhalte beyder Figuren verhalten sich wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze der Pyramide.

Beweis. Die Durchschnitts-Figur hat so viel Seiten-Linien, als die Grundfläche, weil durch jede Seitenlinie der Grundfläche eine Seitenfläche geht, deren Durchschnitt mit der schneidenden Ebene eine Seitenlinie der Durchschnitts-Figur wird. Ueberdem ist jeder Winkel in der Durchschnitts-Figur so groß, als der ihm zugehörige Winkel in der Grundfläche, dessen Spitze nemlich mit jenes Spitze in einer Seitenlinie der Pyramide liegt. So ist BF mit GL, und BC mit GH parallel (323 §), also FBC=LGH (312 §). Auf ähnliche Art erhellet, daß auch BCD =GHI, CDE=HIK sey, u. s. f. Ferner sind die gleichnahmichten Seiten beyder Figuren einander proportional. Es ist nemlich BF:GL=AB:AG, und BC:GH=AB:AG (210 §). Also auch BF:GL =BC:GH. Aus einem ähnlichen Grunde folgt, daß auch BC:GH=CD:HI=DE:IK sey, u. s. f.

Also ist BCDEF:GHIKL=BF^q:GL^q (251 §). Es sey AN eine lothrechte Linie von A auf die Grundfläche, welche die Durchschnitts-Figur in M trift: so ist auch AM auf die Durchschnitts-Figur senkrecht, und die Linien BN, GM sind parallel (323 §), so, daß AN:AM=AB:AG(210§),=BF:GL. Demnach ist BF^q:GL^q=AN^q:AM^q. Also verhaltensich die beyden Figuren *B*CDEF, GHIKL wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze der Pyramide.

353 §.

160 F. Jede dreyseitige Pyramide *ABCD* läst sich in zwey Prismen und zwo Pyramiden eintheilen,

len, so, daß die beyden Prismen zusammen mehr, als die Helfte der ganzen Pyramide betragen.

Beweis. Man theile zuerst die drey Seiten-Linien AB, AC, AD bey E, F, G in zweene gleiche Theile: so schneidet die Ebene EFG eine Pyramide AEFG ab. Und weil EF mit BC, FG mit CD parallel ist (204 §): so ist die Ebene EFG mit BCD parallel (324 §), und $EFG \backsim BCD$ (352 §). Man theile auch BC, CD, BD bey H, I, K in zweene gleiche Theile, und ziehe FH, HI, FI: so wird FHCI die zwote Pyramide, und ihre Grundfläche $HCI =$ und $\backsim EFG$. Denn es ist FI mit AD parallel, und FG mit DI, also auch $DI = FG = CI$. Da nun die Winkel $HCI = EFG$, und $HIC = BDC = EGF$: so passen die Dreyecke HCI und EFG auf einander. Ueberdem sind die Flächen FHI, ABD gegen CBD; und ABD gegen EFG, BDC unter gleichen Winkeln geneigt (329 §); also auch der Flächen-Winkel $AEGF = FHIC$. Ferner $AGFE = FICH$, und $AEFG = FHCI$. Also sind beyde Pyramiden AEFG, und FHCI gleich groß (338 §).

Man ziehe noch GK und HK: so sind GK und FH mit EB parallel (204 §). Also EFGBHK ein Prisma (331 §). Ueberdem sind FG und HK mit DI parallel (204 §), und die Ebene FHI mit GKD parallel; also auch FHIGKD ein Prisma (331 §), dessen Grundflächen die Dreyecke FHI, GKD sind. Man verzeichne die Parallelepida OF, KM, wie im 343 §: so müssen GL und GE in der Ebene EBKG in grader Linie liegen, also FGLM in die Ebene EFG fallen, und demnach sind OF und KM gleich hoch. Da nun $HKDI = 2BHK$ (106 §) $= OBHK$: so

sind auch ihre Grundflächen, und dieserwegen beyde Parallelepipeda OF, KM, folglich ihre Helften, die Prismata EFGBHK, FHIGKD gleich groß.

Nun ziehe man EH und EK: so erhellet leicht, daß die Pyramide EBHK = AEFG sey (338 §). Da nun EFGBHK > EBHK: so ist EFGBHK > AEFG, und deswegen auch FHIGKD > FHCI. Demnach betragen beyde Prismen zusammen mehr, als beyde Pyramiden zusammen, und beyde Prismen betragen mehr, als die Helfte der ganzen Pyramide ABCD.

354 §.

Man kan jede der Pyramiden AEFG, und FHCI eben so wieder eintheilen, wie vorhin die ganze ABCD eingetheilt ward, und es auf solche Art dahin bringen, daß die Summe aller Prismen, die man in der Pyramide ABCD hervorbringt, größer wird, als jeder Körper, der kleiner ist, als die Pyramide ABCD. Es sey nemlich Z ein solcher Körper; und seine Differenz von der Pyramide ABCD sey D: so ist Z+D = ABCD. Wenn nun P die Summe der Prismen ist, und δ ihr Unterschied der Pyramide ABCD: so ist auch P + δ = ABCD, und P + δ = Z + D. Aber bey jeder neuen Eintheilung geht von δ mehr, als die Helfte ab, demnach muß einmahl δ < D werden, und in diesem Fall wird P > Z seyn.

355 §.

Wenn man auf der erweiterten Ebene der Grundfläche BCD eine andre dreyseitige Pyramide *abcd* setzt, daß also die Grundflächen *bcd*, BCD in einer Ebene liegen, und beyde Pyramiden sind gleich hoch: so fällt *a* in die Ebene, welche durch A mit BCD paral-

parallel gehet. Nun schneidet die erweiterte Ebene EFG die Seitenlinien *ab*, *ac*, *ad* so, daß AE:EB = *ae* : *eb* = *af* : *fc* = *ag* : *gd* wird (328 §), und also *ae* und *eb*, *af* und *fc*, *ag* und *gd* gleich groß werden. Theilt man nun auch *bc*, *cd*, *bd* bey *h*, *i*, *k* in zweene gleiche Theile, und ziehet *fh*, *fi*, *hi*, *hk*, *gk*: so erhält man zwey Prismen *efgbhk*, *fhigkd*, wie in der ersten Pyramide. Nun ist EFGBHK : *efgbhk* = BHK : *bhk* (345 §). Also auch FHIGKD : *fhigkd* = BHK : *bhk*, und EFGBHK + FHIGKD : *efgbhk* + *fhigkd* = BHK : *bhk* (191 §) = 4BHK : 4*bhk* (181 §) = BCD : *bcd*.

Theilt man AEFG und *aefg* eben so ein: so erhellet, daß auch beyde Prismen in AEFG zu beyden Prismen in *aefg* sich verhalten, wie EFG : *efg* = BCD : *bcd*, und dies gilt auch von den Prismen, die man durch eben die Eintheilung in FHCI und *fhci* hervorbringt. Also verhalten sich noch alle sechs Prismen in ABCD zu den ähnlichen sechs Prismen in *abcd*, wie BCD zu *bcd*. Man sieht leicht, daß dies Verhältniß zwischen den beyden Summen der Prismen in beyden Figuren allemahl bleibe, wie oft auch die Eintheilung wiederholt worden.

356 §.

Zwo dreyseitige Pyramiden *abcd*, *ABCD* 160
die gleich hoch sind, verhalten sich wie ihre 161
Grundflächen *bcd*, *BCD*. F.

Beweis. Man lege die Grundflächen *bcd* und BCD in einer Ebene so, daß die Spitzen A und *a* auf einer Seite dieser Ebene fallen. Es sey nun *bcd* : BCD = *abcd* : Z, und Z sey ein Körper, der kleiner als ABCD ist: so kan man ABCD nach dem (354

§) in so viel Prismen eintheilen, daß ihre Summe $P \rhd Z$ ist. Dies sey geschehen, und die Pyramide *abcd* sey nach dem 355 § in eben so viel Prismen eingetheilt, deren Summe man durch *p* bezeichne. Nun hat man $p : P = bcd : BCD$ (355 §). Und weil $bcd : BCD = abcd : Z$ seyn soll: so wird $p : P = abcd : Z$. Weil $P \rhd Z$ ist: so müste $p \rhd abcd$ seyn, welches falsch ist. Demnach kan die vierte Proportionalgröße zu *bcd*, BCD, *abcd*, nicht kleiner, als ABCD seyn. Folglich kan aus eben dem Grunde auch die vierte Proportionalgröße zu BCD, *bcd*, und ABCD nicht kleiner seyn, als *abcd*.

Wäre $Z \rhd ABCD$, und die Proportion $bcd : BCD = abcd : Z$ solte richtig seyn: so wäre auch umgekehrt $Z : abcd = BCD : bcd$. Es sey ferner $Z : abcd = ABCD : Y$: so muß $Y \lhd abcd$ seyn, weil $ABCD \lhd Z$ ist. Aber aus beyden Proportionen folgt $BCD : bcd = ABCD : Y$, und diese Proportion kan nicht bestehen, weil Y kleiner, als *abcd* ist, wie eben erwiesen worden.

Demnach kan in der Proportion $bcd : BCD = abcd : Z$ der Körper Z weder kleiner, noch größer, als ABCD seyn. Also ist $bcd : BCD = abcd : ABCD$.

Also sind dreyseitige Pyramiden gleich groß, wenn ihre Grundflächen und Höhen gleich sind.

357 §.

162 F. Eine vielseitige Pyramide *ABCDEF*, verhält sich zur dreyseitigen *GHIK* von gleicher Höhe, wie der ersten Grundfläche *BCDEF* zur Grundfläche der zwoten *HIK*.

Beweis.

Beweis. Man theile die Grundfläche BCDEF durch Diagonalen BD, BE u. s. f. in Dreyecke: so sind ABCD, ABDE, ABEF ebenfalls dreyseitige Pyramiden von eben der Höhe. Diese bezeichne man der Kürze wegen mit P, Q, R und ihre Grundflächen mit a, b, c; überdem sey GHIK $= \pi$, die Grundfläche HIK $= \beta$: so ist $P : \pi = a : \beta$, $Q : \pi = b : \beta$, $R : \pi = c : \beta$ u. s. f. (356 §). Folglich $P+Q+R : \pi = a+b+c : \beta$ (197 §), oder ABCDEF : GHIK = BCDEF : HIK. Es erhellet leicht, daß der Beweis einerley bleibe, die Pyramide ABCDEF mag so viel Seitenflächen haben, als sie wolle.

Jede vielseitige Pyramide ist also einer dreyseitigen gleich, die mit ihr eine gleiche Grundfläche und Höhe hat; und hieraus folgt, daß alle Pyramiden gleich groß sind, die gleiche Grundflächen, und Höhen haben.

358 §.

Jedes Prisma ist dreymahl so groß als eine Pyramide, die mit demselben eine gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Beweis. Es sey ABCDEF ein grades dreyseitiges Prisma, dessen Grundflächen ABC, und DEF sind. In der Seitenfläche ABED ziehe man die Diagonale BD, und in der Seitenfläche ACFD die Diagonale CD: so schneidet die Ebene BCD vom Prisma eine Pyramide ABCD ab, die mit dem Prisma eben die Grundfläche ABC, und Höhe AD hat. Man ziehe auch in der Seitenfläche BCFE die Diagonale CE: so schneidet die Ebene CDE noch eine Pyramide CDEF ab, die mit dem Prisma einerley Grundfläche DEF = ABC, und Höhe AD hat. Al-

so ist ABCD = CDEF. Das noch übrige Stück BEDC ist gleichfalls eine dreyseitige Pyramide, deren Grundfläche BED = ABD. Weil nun ABD auch eine Grundfläche der Pyramide ABCD ist (337 §) und der beyden letztgenannten Pyramiden ABDC, und BEDC Spitzen in C zusammen, ihre Grundflächen aber in einer Ebene fallen: so haben sie gleiche Höhen. Demnach ist ABCD = BEDC, folglich auch CDEF = BEDC, und das Prisma ABCDEF = 3 Pyr. ABCD.

Ist nun eines jeden andern Prisma P Grundfläche B, und Höhe A, und hat eine Pyramide π eben die Grundfläche und Höhe: so kan man ein Dreyeck ABC = B verzeichnen, und ein dreyseitiges grades Prisma ABCDEF in der Höhe AD = A darauf setzen. Zieht man nun BD und CD: so ist ABCD = π (356 §), und 3 ABCD = 3π. Da nun ABCDEF = 3 ABCD: so ist ABCDEF = 3π. Aber auch P = ABCDEF (345 §). Also P = 3π.

359 §.

Also verhalten sich zwo Pyramiden, wie die Prismen, so mit ihnen gleiche Grundflächen und Höhen haben, und ihr Verhältniß ist aus dem Verhältniß der Grundflächen und Höhen zusammengesetzt. Wenn demnach die Grundflächen gleich sind: so verhalten sie sich wie die Höhen.

Steht nun eine Pyramide auf der Grundfläche B in der Höhe A: so ist eine andre Pyramide auf eben der Grundfläche in der Höhe 3A, dreymahl so groß. Eben so groß ist ein Prisma auf der Grundfläch B in der Höhe A. Also ist ein Prisma einer Pyramide

gleich,

gleich, die eine eben so grosse Grundfläche, und dreymahl so grosse Höhe hat.

Haben zwo Pyramiden P und π die Grundflächen B, β, und Höhen A, α: so ist auch $P:\pi = A \times B : \alpha \times \beta$ (348 §). Sind also die Prismen gleich: so sind die Grundflächen den Höhen umgekehrt proportional; umgekehrt: Wenn $B:\beta = \alpha:A$: so folgt daraus $P = \pi$.

360 §.

Den Inhalt einer Pyramide π auszurechnen, wenn der Quadrat-Inhalt ihrer Grundfläche *B* nebst der Höhe *A* gegeben ist.

Aufl. Ein Prisma P auf eben der Grundfläche und Höhe wäre $= B \times A$ (349 §), und es ist $\pi = \frac{1}{3} P$ (358 §), also wird $\pi = \frac{1}{3} B \times A$, oder der dritte Theil des Products aus der Grundfläche in die Höhe, giebt den körperlichen Inhalt der Pyramide. Wenn

B = 7983,5246 Q. F.
A = 512,3 F.

159670492
239505738
79835246
39917623o

so ist P = 40734337,56658 = Cub. F.
und π = 13578112,52219

Der

Der XIV. Abschnitt.

Vom Cylinder und Kegel.

361 §.

Wenn eine grade Linie CD durch des Kreises AB Mittelpunct C gegen seine Ebene unter einem beliebigen Winkel geneigt ist, und durch des Kreises Umfang eine krumme Oberfläche gehet, die so beschaffen ist, daß jede durch einen Punct E im Umfang des Kreises mit CD parallel gezogene grade Linie EF ganz in diese Oberfläche fällt: so schliest die Durchschnitts-Figur GI jeder mit AB parallelen Ebene und der krummen Oberfläche, mit dieser Oberfläche, und dem Kreise AB einen Körper ABGI ein, den man einen **Cylinder**, eine **Walze**, oder eine **Rundsäule** nennt. Die beyden ebenen Figuren AB, DI, heissen seine **Grundflächen**, und CD seine **Axe**. Die Entfernung der Grundflächen von einander heist des Cylinders **Höhe**.

362 §.

164 Beyde Grundflächen des Cylinders sind
F. gleich grosse Kreise, und die Axe geht durch beyder Mittelpunct.

Beweis. Vermöge der gegebenen Erklärung ist die eine Grundfläche AB ein Kreis, durch dessen Mittelpunct C die Axe geht: diese treffen die Ebene der andern Grundfläche in D. Wenn nun durch A mit CD die Parallele AG gezogen ist: so schneidet AG auch

die Ebene GI, und dieser Durchschnittspunct liegt in dem Umfang der Durchschnittsfigur. Nun ist auch DG mit AC parallel (323 §). Also DG = AC. Wenn überdem durch irgend einen andern Punct E im Umfang des Kreises AB mit CD die Parallele EH gezogen ist, welche den Umfang der Durchschnittsfigur in H trift: so ist auch DH = CE, vermöge des erwiesenen; folglich DG = DH. Also sind alle Puncte des Umfangs GHI von D gleichweit entfernt, und GHI ist ein Kreis, dessen Mittelpunct D, und Halbmesser = AC. Folglich sind beyde Grundflächen gleiche Kreise.

Jeder Schnitt einer mit den Grundflächen parallelen Ebene giebt also ebenfalls einen Kreis, dessen Mittelpunct im Durschnittspunct mit der Axe fällt.

363 §.

Wenn eine Ebene durch die Axe des Cylinders gehet: so ist die Durchschnittsfigur ein Parallelogramm AGIB, denn AB, und GI sind parallel, und die Parallelen durch A und B mit CD fallen zugleich in die Ebene ADB und in des Cylinders Oberfläche, also sind es die Durchschnittslinien mit der Oberfläche.

364 §.

Ein senkrechter oder grader Cylinder ist, dessen Axe CD auf den Grundflächen senkrecht steht, ein schiefer Cylinder aber, dessen Axe gegen die Grundflächen, unter einem schiefen Winkel geneigt ist.

Der Schnitt durch die Axe des senkrechten Cylinders ist ein Rechteck AGIB, dessen Grundlinie AB dem Durchmesser der Grundfläche, und dessen Höhe AG der Höhe des Cylinders gleich ist. Es ist oft

bequem,

bequem, blos diesen Schnitt durch die Axe an statt des Cylinders zu zeichnen, weil man sich den zugehörigen Cylinder leicht mit vorstellen kan. Gemeiniglich stellt man sich die Sache so vor: Der Cylinder entstehe, wenn man das Rechteck AGIB um die Mittellinie CD so weit herum drehet, bis AG, in BI, und BI in AG komt. Man sieht leicht, daß AG bey diesem Herumdrehen durch die eine Hälfte, und BI durch die andre Hälfte der Cylindrischen Oberfläche fortgehen, die Ebene ACDG aber in der einen, und DCBI in der andern Hälfte des Cylindrischen Raums herumgehen würde. Es ist blos ein Hülfsmittel für die Einbildungskraft, wenn man sich da einen Cylinder vorstellen soll, wo nur ein Rechteck als ein Schnitt durch die Axe gezeichnet ist.

365 §.

F. 165 Wenn eine grade Linie AC die Ebene eines Kreises BD im Mittelpunct C unter einem beliebigen Winkel schneidet, und es gehet durch einem Punct A der Linie AC, und alle Puncte im Umfang des Kreises BD eine krumme Oberfläche von der Beschaffenheit, daß jede durch A, und einen Punct E im Umfang dieses Kreises gezogene grade Linie, AE ganz in diese Oberfläche fällt: so schliest diese Oberfläche mit der Kreisfläche BD einen Körper ein, der ein **Kegel** (conus) genannt wird. Die Linie AC heist seine Axe, BD seine **Grundfläche**, A seine **Spitze**, und die Entfernung der Spitze von der Grundfläche, seine **Höhe**. Die Seite des Kegels heist jede grade Linie, wie AE auf der Oberfläche desselben zwischen seiner Spitze, und einem Punct E im Umfang der Grundfläche.

Schnei-

Schneidet man also den Kegel durch seine Axe: so ist die Durchschnittsfigur ABD ein Dreyeck, dessen Grundlinie BD, der Durchmesser der Grundfläche, und dessen zwo übrige Seiten ein paar entgegengesetzte Seitenlinien des Kegels sind.

366 §.

Ein grader Kegel ist, dessen Axe auf des Kegels Grundfläche senkrecht stehet, ein schiefer Kegel aber, dessen Axe gegen die Grundfläche unter einem schiefen Winkel geneigt ist.

Alle Seitenlinien eines senkrechten Kegels sind also gleich groß, und der Schnitt durch seine Axe giebt ein gleichschenklichtes Dreyeck ABD, welches ebenfalls zuweilen allein gezeichnet wird, wenn die Zeichnung eigentlich einen Kegel vorstellen soll. Man macht sich hier die Vorstellung, der senkrechte Kegel entstehe, indem das gleichschenklichte Dreyeck ABD sich um die Mittellinie AC so weit drehet, bis AB in AD, und AD wieder in AB fällt. Es fällt leicht in die Augen, daß auf solche Art AB durch die eine, und AD durch die andre Hälfte der Conischen Oberfläche, das Dreyeck ACB aber durch die eine, und ACD durch die andre Hälfte des inwendigen Conischen Raums geführet werde. 165 F.

367 §.

Wenn man den Kegel *ABD* mit einer Ebene *FI* der Grundfläche *BD* parallel schneidet: so wird die Durchschnittsfigur *FI* ein Kreis, dessen Mittelpunct in den Durchschnitt mit der Axe fällt. 165 F.

Beweis.

Beweis. Man schneide den Kegel auch durch die Axe: so werden die Durchschnitte BC, FG einander parallel (323 §) und also AC:AG = BC:FG. Ist also der Grundfläche Halbmesser BC = r: so wird GF = $\frac{r \times AG}{AC}$ allemahl von einer Größe, wo auch F im Umfang der Durchschnittsfigur genommen wird. Demnach ist FI ein Kreis, dessen Mittelpunct G.

Nun weis man, es sey der Kreis FI: Kreis BD = FG^q:BC^q (255 §) = AG^q:AC^q. Wenn aber AL auf der Grundfläche senkrecht ist, und die Ebene der Durchschnittsfigur in K trift: so ist AG:AC = AK:AL. Also AG^q:AC^q = AK^q:AL^q. Demnach auch der Kr. FI:Kr. BD = AK^q:AL^q, oder die Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze des Kegels.

368 §.

166 Wenn ein Prisma *P*, und ein Cylinder C
167 gleiche Höhen haben: so verhalten sich beyde
F. Körper gegeneinander, wie ihre Grundflächen.

Beweis. Es sey B des Prisma P, und K des Cylinders C Grundfläche. Man nehme an, es sey
166 P:C = B:Z, und Z < K: so kan man im Kreise K
F. ein reguläres Polygon ABCDE verzeichnen, welches größer als Z ist.

Es sey dies geschehen, und man ziehe durch alle Winkelpuncte desselben A, B, u. s. f. mit des Cylinders Axe die Parallelen A*a*, B*b*, u. s. f., die mit der Ebene der entgegengesetzten Grundfläche, in *a*, *b*, u. s. f. zusammenstossen: so liegen diese Parallelen *alle*

in

in des Cylinders Oberfläche, und man erhält im Cylinder ein Prisma, dessen Grundflächen ABCDE, *abcde* sind. Diese setze man der Kürze wegen $= b$, und das zugehörige Prisma $= p$: so ist $p : P = b : B$ (345 §). Nun ist angenommen, es sey $P : C = B : Z$; also müste $p : C = b : Z$ seyn (171 §), da aber $b > Z$ ist: so wäre $p > C$, welches nicht seyn kan.

Es bleibe die Proportion $P : C = B : Z$, und es sey $Z > K$: so kan man um den Kreis K ein reguläres Polygon beschreiben, welches kleiner, als Z ist. Dies sey geschehen, und es sey ABCDE dies Polygon, dessen Seitenlinien den Kreis K in den Puncten P, Q, R, S, T, berühren. Durch diese Berührungspuncte ziehe man mit des Cylinders Axe die Parallelen Pp, Qq, u. s. f., und lege durch diese Parallelen, und die zugehörige Seitenlinien AB, BC, u. s. f. der Grundfläche, Ebenen, welche sich in Aa, Bb, Cc, u. s. f. schneiden. Nun liegen Pp, Qq, u. s. f. in des Cylinders Oberfläche, und jede von den Durchschnittslinien, wie Aa, ist mit des Cylinders Axe parallel. Denn Pp, und Tt sind parallel, also ist Pp mit der Ebene $AEea$ parallel (311 §). Demnach können Pp, und Aa nicht zusammenstossen, und weil sie in einer Ebene liegen: so ist Aa mit Pp, folglich mit des Cylinders Axe parallel. Also ist Aa mit allen übrigen Bb, Cc, u. s. f. parallel. Wenn nun a, b, c u. s. f. die Durchschnittspuncte dieser Parallelen mit der andern Grundfläche des Cylinders sind: so erhält man ein Prisma um den Cylinder, dessen Grundflächen ABCDE, *abcde* sind. Diese setze man $= \beta$, und das zugehörige Prisma $= \pi$: so ist $\pi : P = \beta : B$ (345 §). Aber vermöge der Voraussetzung ist $P : C = B : Z$; also wäre $\pi : C = \beta : Z$ (171 §). Da nun

167 F.

$\beta < Z$ ist: so wäre $\pi < C$, welches nicht seyn kan.

Weil also weder $Z < K$ noch $Z > K$ seyn kan, wenn die angenommene Proportion bestehen soll: so muß $Z = K$ seyn, und es ist $P : C = B : K$.

369 §.

Ein Prisma und Cylinder, die gleiche Grundflächen und Höhen haben, sind also gleich große Körper, und demnach sind auch alle Cylinder gleich groß, die gleiche Grundflächen und Höhen haben.

Das Verhältniß eines Cylinders zum andern, und eines Prisma zum Cylinder, ist aus den beyden Verhältnissen der Grundflächen und Höhen zusammengesetzt, also einerley mit dem Verhältniß der Producte der Grundflächen in die Höhen.

Wenn ein Prisma und Cylinder, oder ein paar Cylinder gleich groß sind: so verhalten sich die Grundflächen umgekehrt, wie die Höhen, und aus dem letztern folgt umgekehrt, das erstere.

Ein Cylinder ist dreymahl so groß, als eine Pyramide, die mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat.

370 §.

Den Inhalt eines Cylinders auszurechnen, wenn der Durchmesser δ seiner Grundfläche, und seine Höhe α gegeben sind.

Aufl. Aus dem gegebenen Durchmesser δ suche man den Quadrat-Inhalt der Grundfläche, und multiplicire ihn mit der Höhe α des Cylinders: so giebt das Product seinen Inhalt. Denn dies ist der

Inhalt

Inhalt eines dem Cylinder gleichen Prisma (349 §).
Es sey $\delta = 73$ F. $a = 48$ F: so ist
die Grundfläche 4183,265 Q. F.

48

33466120
16733060

Also der Cyl. = 200796,720 Cub. F.

371 §.

Wenn eine Pyramide *P* und ein Kegel *C* gleich hoch sind: so verhalten sich beyde Körper ebenfalls wie ihre Grundflächen.

Beweis. Es sey B der Pyramide und *K* des Kegels Grundfläche, und man setze, es sey P:C = B:Z: so kan Z weder kleiner, noch größer, als K seyn.

Ist $Z < K$: so beschreibe man in des Kegels Grundfläche K ein reguläres Polygon ABCDEF, welches größer, als Z ist (147 §), und ziehe AB, AC, AD, u. s. f.: so hat man in dem Kegel eine Pyramide ABCDEF, deren Grundfläche das Polygon BCDEF ist. Dies setze man $= b$, und die Pyramide $= p$: so ist $b > Z$. Es ist aber $p:P = b:B$, und vermöge der Voraussetzung P:C = B:Z. Also wäre $p:C = b:Z$, und weil $b > Z$: so müste $p > C$ seyn, welches nicht seyn kan. 168 F.

Ist $Z > K$: so beschreibe man um des Kegels Grundfläche ein reguläres Polygon BCDEF, welches kleiner, als Z ist. Man ziehe die graden Linien AB, AC, AD, u. s. f.: so erhält man eine Pyra-

mide ABCDEF, die den Kegel umgiebt, und deren Grundfläche das Polygon BCDEF ist. Es sey diese Pyramide $= \pi$, ihre Grundfläche $= \beta$: so ist $\beta < Z$, und man hat $\pi : P = \beta : B$ (359 §). Da nun $P : C = B : Z$ seyn soll: so würde $\pi : C = \beta : Z$ seyn, und weil $\beta < Z$ ist, auch $\pi < C$ seyn müssen, welches nicht bestehen kan.

Demnach muß $Z = K$, also $P : C = B : K$ seyn.

372 §.

Eine Pyramide und ein Kegel sind also gleich groß, wenn sie gleiche Grundflächen und Höhen haben: und hieraus folgt, daß alle Kegel gleich groß sind, wenn ihre Grundflächen und Höhen es sind.

Ein Cylinder ist demnach dreymahl so groß, als ein Kegel, der mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat. Auch gelten alle übrige Sätze vom Cylinder und Kegel, die im 359 § vom Prisma und der Pyramide erwiesen sind.

373 §.

Den Inhalt eines Kegels auszurechnen, wenn der Durchmesser seiner Grundfläche und seine Höhe bekannt ist.

Aufl. Man berechne den Quadrat-Inhalt der Grundfläche, und multiplicire ihn in den dritten Theil der Höhe des Kegels: so giebt das Product den Inhalt einer dem Kegel gleichen Pyramide (360 §), also den Inhalt des Kegels selbst. Wenn der Grundfläche Durchmesser $= 73$ Fuß, die Höhe

48 Fuß: so ist die Grundfläche 4183,265 Quadrat-Fuß, und der Kegel = 66565,573 Cubic-Fuße.

374 §.

Concentrische Cylinder ABCD, EFGH, heissen solche, die einerley Axe haben. Ihre Grundflächen sind concentrische Kreise. Das Stück, um welches der größere Cylinder ABCD den kleinern EFGH übertrift, und welches zwischen den beyden Cylindrischen Oberflächen und zweenen Ringen um HG und EF eingeschlossen ist, heist eine Cylindrische Röhre (tubus cylindricus). Die Axe beyder Cylinder heist auch die Axe der Röhre, und ihre Höhe ist mit der Cylinder Höhe einerley. 170 F.

Wenn beyde Cylinder senkrechte sind: so wird auch die Röhre eine grade Röhre, im Gegentheil eine schiefe Röhre seyn.

Wenn das Rechteck durch die Axe ABCD sich um die Axe KI so drehet, wie im 364 § angenommen worden: so beschreibt das Stück ABEH desselben die eine Helfte, und das Stück GFCD die andere Helfte der Röhre. Sind die Rechtecke ABCD, EFGH durch die Axe der concentrischen Cylinder in der Zeichnung nur ausgedruckt; so kan man sich die Röhre zwischen ihren Oberflächen leicht vorstellen.

375 §.

Das Stück BE, welches vom Halbmesser KB der größern Grundfläche in den Ring zwischen den Kreislinien BC und EF fällt, und die Breite dieses 170 F.

Rings abgiebt, ist zugleich die Dicke der Cylindrischen Röhre, deren Grundfläche der Ring ist. Der Durchmesser EF der kleinern Grundfläche, kan die inwendige Weite der Röhre, und BC, der grössern Grundfläche Durchmesser, die auswendige Weite der Röhre, heissen. Ein Rechteck, dessen eine Seite die Dicke der Röhre BE, und die andre Seite der Ueberschuß EC der auswendigen Weite über die Dicke ist, heist der Kürze wegen das Rechteck der Röhre.

376 §.

170 F. Das Rechteck der Röhre $BE \times EC$ ist so groß, als der Unterschied der Quadrate der halben auswendigen und inwendigen Weite der Röhre.

Beweis. Es sey EL auf BC senkrecht: so ist $BE \times EC = EL^q$ (214 §). Aber $EL^q = KL^q - KE^q$ (111 §). Also auch $BE \times EC = KL^q - KE^q = KB^q - KE^q$.

377 §.

170 F. Eine Cylindrische Röhre $AEFD$ verhält sich zu einem gleich hohen Cylinder $QMNR$, wie das Rechteck der Röhre zum Quadrat des Halbmessers der Grundfläche des Cylinders.

Beweis. Es ist Cyl. ABCD : Cyl. EFGH = Kreis BC : Kreis EF (369 §) $= KB^q : KE^q$ (255 §). Also $ABCD - EFGH : EFGH = KB^q - KE^q : KE^q$ (180 §). Da nun $KB^q - KE^q = BE \times EC$ (376 §), und ABCD — EFGH = der Röhre AEFD:

so wird AEFD : EFGH = BE × EC : KEq. Weil nun auch EFGH : QMNR = KEq : OMq (369 §) : so ist AEFD : QMNR = BE × EC : OMq.

Der XV. Abschnitt.

Vom Inhalt der Kugel.

378 §.

Die Kugel ist ein Körper, den eine krumme Oberfläche ADEB so umgiebt, daß alle ihre Puncte von einem Punct C innerhalb des Körpers, welcher der Kugel Mittelpunct heist, gleich weit entfernt sind. Jede grade Linie CA vom Mittelpunct der Kugel bis an einen Punct ihrer Oberfläche gezogen, heist ein Halbmesser der Kugel (radius, s. semidiameter sphaerae). Also sind alle Halbmesser der Kugel gleich groß. 171 F.

379 §.

Jede grade Linie DE, die durch einen Punct G innerhalb der Kugel geht, trift ihre Oberfläche wenigstens in zweenen Puncten D und E, aber auch nicht in mehrern. Denn wäre F ein dritter Durchschnitts-Punct: so würde die Ebene durch C, D, E, auch durch F gehen (10 §), und es würde CD = CE = CF seyn müssen, welches dem 73 § entgegen ist.

Eine grade Linie AB durch der Kugel Mittelpunct C zu beyden Seiten bis an die Oberfläche der Kugel gezogen, heist ein **Durchmesser** der Kugel. Dieser ist demnach doppelt so groß, als der Kugel Halbmesser, und deswegen sind alle **Durchmesser** in einerley Kugel gleich groß.

380 §.

Jeder Punct, dessen Entfernung von der Kugel Mittelpunct kleiner, oder größer, als der Halbmesser ist, liegt im ersten Fall innerhalb, im zweyten Fall, ausserhalb der Kugel, so wie er in der Oberfläche der Kugel liegen muß, wenn seine Entfernung vom Mittelpunct dem Halbmesser gleich ist.

381 §.

172 F. Wenn eine Ebene *AB* die Kugel durch ihren Mittelpunct *C* schneidet: so ist die Durchschnittsfigur ein Kreis, dessen Halbmesser, und Mittelpunct, mit der Kugel Halbmesser, und Mittelpunct einerley ist so, daß alle diese Kreise in einerley Kugel gleich groß sind, die Ebene mag übrigens liegen, wie sie wolle.

Auch theilet jede solche Ebene die Kugel in zwo gleiche Halbkugeln.

Beweis. Alle Puncte A, D, B, E u. s. f. des Umfangs der Durchschnittsfigur liegen in der Kugel Oberfläche; deswegen sind CA, CB, CD, CE, u. s. f. Halbmesser der Kugel, und insgesamt gleich groß. Demnach ist ADBE ein Kreis, der mit der Kugel einerley Mittelpunct, und Halbmesser hat.

Wenn nun ein Durchmesser der Kugel FG auf der Ebene ADBE senkrecht stehet, und man legt durch E, C, und F, oder durch D, C, und G eine Ebene: so werden beyde Durchschnittsfiguren gleich grosse Kreise der Kugel, wovon die Stücke FE, DG Quadranten sind, weil ECF = R = DCG (364 §). Ist nun der Winkel ACE = ACD, und man kehrt das unterste Stück AEBDG der Kugel um AB herum, bis die Ebene ABD in AEB fällt: so fällt CG in CF (305 §) G in F, CD in CE (18 §), und DG in EF (116 §). Dies geschieht allemahl, wie groß man ACE nehmen will: also passen beyde Stücke der Kugel ineinander, und sind gleich grosse Halbkugeln.

382 §.

Wenn eine Ebene *AB* die Kugel nicht durch den Mittelpunct schneidet, und man ziehet von der Kugel Mittelpunct *C* auf diese Ebene eine lothrechte Linie *CD*: so geht diese durch einen Punct *D* dieser Ebene innerhalb der Kugel. 173 F.

Beweis. Denn wäre C*d* auf dieser Ebene senkrecht, und fiele *d* ausserhalb der Kugel: so wäre C*d* größer, als der Kugel Halbmesser (380 §). Aber auch jede Linie CD von C nach einem Punct D in der Durchschnittsfigur gezogen, wäre größer, als C*d* (305 §), also größer, als der Halbmesser (13 §. R.), also müste D ausser der Kugel liegen, gegen die Voraussetzung.

383 §.

Jeder Kugelschnitt ist ein Kreis, dessen Mittelpunct derjenige ist, in welchem eine loth-

rechte Linie durch der Kugel Mittelpunct die Ebene des Schnitts trift.

In gleichen Entfernungen vom Mittelpunct sind diese Kreise gleich groß: bey ungleichen Entfernungen aber ist derjenige größer, der dem Mittelpunct näher liegt, als der entfernetere.

173 F. **Beweis.** Es sey CD auf die Ebene AB lothrecht: so liegt D innerhalb der Durchschnittsfigur (382 §). Von D sey nach einem Punct A im Umfang derselben DA, und überdem CA gezogen: so ist $DA = r(AC^2 - CD^2)$ (283 §). Weil nun AC, und CD immer einerley Größe behalten, wo auch A im Umfang genommen wird: so ist auch DA immer von einerley Größe, also die Figur ein Kreis, und D sein Mittelpunct.

Ist nun CE die Entfernung der Ebene eines andern Schnitts vom Mittelpunct, in dessen Umfang F liegt: so ist auch dieser Schnitt ein Kreis, dessen Halbmesser $EF = r(CF^2 - CE^2)$. Es ist aber $AC = CF$ (378 §). Wenn also überdem $CD = CE$: so ist $DA = EF$, wenn $CD > CE$: so ist $DA < CE$, und wenn $CD < CE$: so ist $DA > CE$, woraus der zweyte Satz folget.

384 §.

Hieraus ergeben sich sehr leicht noch folgende Sätze.

Unter allen Kreisen auf der Oberfläche der Kugel sind diejenigen die grösten, deren Ebenen durch der Kugel Mittelpunct gehen, und sie heissen deswegen

gröste

gröste Kreise, die übrigen aber kleinere Kreise der Kugel.

Wenn demnach ein Kugelschnitt ein gröster Kreis ist: so geht seine Ebene durch der Kugel Mittelpunct, weil es sonst auf eben der Kugel noch größere Kreise geben müste.

Eine grade Linie CE durch des kleinern Kreises FG, und der Kugel Mittelpunct steht auf der Ebene des Kreises FG lothrecht. Denn wäre nicht CE; sondern Ce auf FG senkrecht: so wäre e dieses Kreises Mittelpunct, wider die Voraussetzung.

Also geht auch jede grade Linie auf des kleinern Kreises FG Ebene im Mittelpunct E lothrecht gesetzt, durch der Kugel Mittelpunct C. Wäre Ec auf FG senkrecht, und gienge nicht durch C: so wäre zugleich CE auf FG senkrecht, welches nicht seyn kan (305 §).

Sind zweene kleinere Kreise der Kugel AB, FG gleich groß: so sind sie vom Mittelpunct der Kugel gleichweit entfernt. Denn ihre Entfernungen sind CD, CE, und es ist $CD = r(AC^q - AD^q)$, $CE = r(CF^q - EF^q)$, also $CD = CE$, wenn $AD = EF$.

Ist aber $EF > AD$: so ist $CE < CD$: also liegt der größere Kugelschnitt dem Mittelpunct näher, als der kleinere.

385 §.

Jede grade Linie *AB* zwischen zweenen Puncten der Oberfläche einer Kugel gezogen fällt ganz innerhalb der Kugel. 173 F.

Beweis.

Beweis. Denn sie liegt allemahl in der Ebene eines gröften Kreises ABFH, und ist eine Sehne desselben, die ganz in der Kreisfläche fällt.

386 §.

Eine Ebene berührt die Kugel, wenn sie zwar mit der Kugel Oberfläche zusammen stöst, aber kein Punct von ihr innerhalb der Kugel fällt.

Also kan eine Ebene die Kugel nur in einem Punct berühren. Denn geht eine Ebene durch zweene Puncte A und B in der Kugel Oberfläche: so liegt die grade Linie AB in dieser Ebene, aber auch zugleich innerhalb der Kugel (385 §). Demnach berührt die Ebene die Kugel nicht, weil Puncte von ihr innerhalb der Kugel fallen.

387 §.

173 F. Eine Ebene *MN* durch einen Punct *H* in der Kugel Oberfläche auf dem Halbmesser *CH* senkrecht gesetzt, berührt die Kugel.

Beweis. Denn jeder andre Punct I dieser Ebene liegt ausserhalb der Kugel, weil CI > CH, oder CI gröser, als der Halbmesser ist (380 §).

388 §.

Wenn eine Ebene *MN* die Kugel in *H* berührt: so ist der Halbmesser *CH* im Berührungspunct auf der Ebene *MN* senkrecht.

Beweis. Weil alle andre Puncte der Ebene MN, H ausgenommen ausser der Kugel fallen: so

müs-

müssen sie alle von C weiter entfernt seyn, als H davon entfernt ist. Demnach ist CH unter allen Linien von C nach MN die kürzeste, folglich auf MN senkrecht (305 §).

Demnach muß eine durch den Berührungspunct H auf MN senkrecht gesetzte Linie durch der Kugel Mittelpunct C, und jede von C auf MN senkrecht gezogene Linie durch den Berührungspunct H gehen (305 §).

389 §.

Es sey ABD ein Halbkreis, und der Halbmesser CB auf dem Durchmesser AD senkrecht. Der Halbkreis werde um BC gedrehet, bis A in D, und D wiederum in A gekommen ist: so beschreibt der Halbkreis eine Halbkugel: CA beschreibt die eine, und CD die andre Hälfte eines grösten Kreises, den man die Grundfläche der Halbkugel nennen kan, und auf seiner Ebene steht CB senkrecht. Man kan CB die Höhe der Halbkugel nennen, weil eine Ebene, welche die Halbkugel in B berührt, mit der Ebene der Grundfläche parallel ist. 174 F.

Wenn E ein Punct im senkrechten Halbmesser BC ist, wodurch man eine Sehne FG des Halbkreises mit AD parallel gezogen hat, und FH, GI sind auf AB nebst AK und DL, welche mit FG in K und L zusammen stossen, senkrecht gesetzt: so beschreibt das Rechteck HFGI einen graden Cylinder, dessen Oberfläche in der Kugel, und das Rechteck AKLD einen graden Cylinder, dessen Oberfläche ausser der Kugel fällt. Man kan jenen, einen inwendigen, und diesen

diesen, den zugehörigen auswendigen Cylinder nennen.

Beyder Unterschied ist die Cylindrische Röhre AFGD (374 §).

390 §.

In einer Halbkugel *ABD* kan man so viele inwendige, und zugehörige auswendige gleich hohe grade Cylinder beschreiben, daß der Unterschied aller inwendigen von den auswendigen weniger, als jeder gegebene Körper, beträgt.

Beweis. Man theile den senkrechten Halbmesser BC bey E, M, N, u. s. f. in so viel gleiche Theile, als man will, und ziehe durch alle Theilungspuncte mit AD die parallelen Sehnen FG, OP u. s. f. auch zuletzt durch B mit AD die Parallele $\varkappa\lambda$, welche den Kreis berührt. Man zeichne für FG, OP, $\alpha\beta$, u. s. f. die Cylinder HGFI, und AKLD, SOPV und QFGR u. s. f. wie im 389 §: so erhält man zuletzt einen auswendigen Cylinder $\alpha\varkappa\lambda\beta$, dem kein inwendiger mehr zugehört. Nun fällt ohne Weitläuftigkeit leicht in die Augen, es sey

174 F.

der Cyl. $\alpha\varkappa\lambda\beta$ = Cyl. $\zeta\varepsilon\eta\vartheta$

die Röhre $O\alpha\beta P$ = Röhre $F\varepsilon\eta W$

die Röhre FOPG = Röhre HSVI

die Röhre AFGD = Röhre AFGD.

Man addire alles auf beyden Seiten: so erhält man gleiche Summen. Nun macht die erste Summe die gesamte Differenz aller inwendigen und auswen-

wendigen Cylinder, die zwote Summe aber, den ganzen Cylinder AKLD aus. Also ist dieser letzte Cylinder allemahl so groß, als die Differenz aller inwendigen und auswendigen in und um die Halbkugel.

Halbirt man nun jede der Abtheilungen CE, EM, u. s. f. und verfährt, wie vorhin: so wird AKLD halb so groß, als vorher (369 §). Denn seine Höhe wird halb so groß, als die vorige, und dies erfolgt jedesmahl, wenn man aufs neue halbirt, und die übrige Arbeit wiederholt. Ist nun gleich D ein Körper, so klein man will: so wird endlich AKLD $\prec$ D (139 §. Rech.)

391 §.

Der Unterschied der Halbkugel von der inwendigen Cylinder-Summe ist allemahl kleiner, als AKLD, also wird auch dieser Unterschied kleiner werden können, als jeder gegebene Körper. Es sey nun ein Körper Z kleiner als die Kugel, und sein Unterschied von der Halbkugel sey D: so ist $Z+D=H$, wenn H die Halbkugel bedeutet. Die Summe aller inwendigen Cylinder sey S, und ihre Differenz von der Halbkugel sey δ: so ist auch $S+\delta=H$, und $S+\delta=Z+D$. Man nehme nun der inwendigen Cylinder so viele, daß $\delta \prec D$ wird: so ist $S \succ Z$. **Demnach kan die Summe aller inwendigen Cylinder größer werden, als jeder Körper, der kleiner, als die Halbkugel ist.**

392 §.

Auch ist der Unterschied der Halbkugel von der auswendigen Cylinder-Summe kleiner, als AKLD,

und

und es kan demnach auch dieser Unterschied kleiner werden, als jeder gegebene Körper.

Er sey Δ, und der auswendigen Cylinder Summe Σ: so ist $\Sigma = H + \Delta$. Es sey ein Körper Y größer, als die Halbkugel, und sein Unterschied von der Halbkugel sey E: so ist $H + E = Y$. Man nehme nun der auswendigen Cylinder so viele, daß $\Delta < E$ wird: so ist $H + \Delta < H + E$, folglich $\Sigma < Y$. Demnach kan die Summe der auswendigen Cylinder kleiner werden, als jeder Körper der größer als die Halbkugel ist.

393 §.

Die Halbkugel ist doppelt so groß, als ein Kegel, der mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat.

175 Beweis. Wenn AB, DE ein paar senkrechte
176 Durchmesser des Kreises ADBE sind, und man hat
F. durch A, D, B, E Tangenten des Kreises gezogen: so erhält man ein Quadrat F*a*b*b*G um den Kreis. Man ziehe CF, CG, und mache sich die Vorstellung, die Figur werde um DE gedrehet: so beschreibt der Kreis eine Kugel F*a*b*b*G sowohl, als FABG einen Cylinder, FCG einen Kegel, und der beyden letztern Grundfläche FG ist der Grundfläche AB, der Halbkugel ADB gleich, so wie auch die Höhen CE und DC dieser Körper gleich sind. Nun ist der Cylinder $FABG = 3$ Kegel FCG (372 §). Wenn man also den Kegel FEG aus dem Cylinder FABG herausnimt: so wird das übrige Stück AF CBG $= 3$ FCG $-$ FCG $= 2$ FCG. Es kan aber

der

der Körper AFCGB weder kleiner, noch größer, als die Halbkugel ADB seyn.

Es sey AFCGB < ADB, und man beschreibe in 175
der Halbkugel ADB so viel inwendige Cylinder LM, F. NO, PQ, u. s. f. daß ihre Summe S > AFCGB ist (391 §). In so viele gleiche Theile nun CD bey H, I, K, u. s. f. getheilt worden, in eben so viel Theile sey auch CE bey R, S, T, u. s. f. getheilt. Durch R, S, T ziehe man UV, WX, YZ u. s. f. mit AB parallel, welche CF in α, β, γ, u. s. f. CG in δ, ε, ζ, u. s. f. schneiden.

Durch α, β, γ, δ, ε, ζ, u. s. f. setze man die Linien αη, βϑ, δλ, εμ, ζν, u. s. f. aufwärts mit CE parallel: so ergeben sich durchs Umdrehen um DE in AFCGB so viel Cylindrische Röhren Aαδβ, Uβεν, Wγζχ, als man inwendige Cylinder LM, NO, PQ in der Halbkugel hat. Es ist aber jede Röhre dem zugehörigen Cylinder gleich. Denn es ist HMq = DH × HE = Aη × ηB; IOq = DI × IE = Uϑ × ϑV; KQq = DK × KE = Wκ × κX. Also vermöge des 377 §.

Cyl. LM = Röhre Aαδβ.
Cyl. NO = Röhre Uβεν.
Cyl. PQ = Röhre Wγζχ.

Folglich S = Summe aller Röhren, also auch S < AFCGB, welches wider die Voraussetzung streitet.

Es sey AFCGB > ADB, und man beschreibe um 176
die Halbkugel ADB so viele auswendige Cylinder, F. LB, MN, OP, QR, u. s. f. daß ihre Summe S < AFCGB ist (392 §). In so viele gleiche Theile nun

CD bey diesem Geschäfte bey H, I, K, u. s. f. getheilt worden, in eben so viele gleiche Theile sey auch CE bey S, T, V, u. s. f. eingetheilt. Durch S, T, V ziehe man VW, XY, Zz mit AB parallel, welche CF in α, β, γ, und CG in δ, ε, ζ, schneiden. Durch diese Durchschnittspuncte ziehe man ferner $\alpha\eta$, $\beta\vartheta$, $\gamma\varkappa$, $\delta\lambda$, $\varepsilon\mu$, $\zeta\nu$ mit CE unterwärts parallel: so ergeben sich um den Körper AFCGB so viele Cylindrische Röhren, wovon die erste VABW selbst ein Cylinder wird, als um die Halbkugel ADB auswendige Cylinder beschrieben sind. Es ist aber jede Röhre dem zugehörigen Cylinder gleich. Man hat nemlich $HN\eta = DH \times HE = V\alpha \times \alpha W$, $PI\eta = DI \times IE = X\beta \times \beta Y$, $RK\eta = DK \times KE = Z\gamma \times \gamma z$. Also vermöge des 369 und 377 §.

Cyl. LB = Cyl. AW.
Cyl. MN = Röhre $V\eta\varepsilon W$.
Cyl. OP = Röhre $X\vartheta\mu Y$.
Cyl. QR = Röhre $Z\varkappa\nu z$.

Folglich S = Summe aller Röhren, also auch S > AFCGB, welches wiederum mit der Voraussetzung streitet.

Da nun AFCGB weder kleiner, noch größer, als ADB seyn kan: so ist AFCGB = ADB. Also auch ADB = 2FCG.

394 §.

176 F. Ein Kegel FDG, dessen Höhe doppelt so groß, als CE, ist ebenfalls = 2FCG. Also ist die Halbkugel ADB = FDG, und die ganze Kugel ADBE = 2FDG.

Da

sehr erleichtert, das in den Lehrstunden angehörte für sich zu wiederholen. Man wende nicht ein, daß auf solche Art der mündliche Vortrag ganz unnöthig seyn werde, wenn alles schon im Buch stehe, was der Lehrer von der Sache sagen könne. In den mathematischen Collegiis komt es nach meiner Erfahrung nicht so sehr darauf an, daß der Lehrer viel mehr vortrage, als was im Buch stehet, sondern vornemlich darauf, daß er den Zuhörern das Buch selbst nur verständlich und geläufig mache. Die allerwenigsten Zuhörer fassen dasjenige, was im Buch entweder gar nicht oder so kurz stehet, daß der mündliche Vortrag vieles zur Ergänzung beyfügen mus.

Vielleicht ist dies noch nicht genug, die Art des Vortrags zu rechtfertigen, welche ich in einer Schrift erwählt habe, wovon ich wenigstens einige Theile in meinen Akademischen Vorlesungen zum Grunde legen werde. Wenn ich aber gleich hierin gefehlet habe, so hoffe

ich doch, daß Kennern mein Plan nicht ganz misfallen werde, wenn sie denselben aus folgendem Gesichtspunkt betrachten wollen. Mir ist kein neues Lehrbuch der gesamten Mathematik als die Wolfischen Elementa bekant, worin alle Theile der praktischen Mathematik volständig vorgetragen sind. (Ich rede hier, wie aus der Anführung der Wolfischen Elementorum erhellet, von keinem Compendio der angewandten Mathematik; daher wird man mir das Kästnerische Handbuch nebst dem Clemmschen nicht entgegen setzen.) Ein Buch aber, welches zwischen einem eigentlichen Compendio und einem ganz ausführlichen Lehrbegrif das Mittel hielte, dürfte wohl zu algemeiner Verbreitung so nüzlicher Kenntnisse, als die Mathematik lehret, das seinige beytragen. Ich fange mit diesem ersten Theil ein Buch an, dessen Einrichtung wenigstens nach meiner Absicht hierauf vorzüglich abzwecket. Man sehe demnach dies Buch als ein solches an, wel-

ches vornemlich für diejenigen geschrieben ist, die durch eigenen Fleis sich volständigere Kenntnisse erwerben, und nicht bey den ersten Anfangsgründen stehen bleiben wollen; so wird man es, wie ich hoffe, dieser Absicht angemessen finden. Ich werde am besten, bey der Ausgabe eines jeden neuen Theils darüber mich näher erklären können, auf was Art ich jedesmahl dieser Absicht ein Genüge zu leisten suche. Deswegen begnüge ich mich hier davon das algemeine gesagt zu haben. Nur mus ich noch mit wenigen etwas von diesem ersten Theil beyfügen.

Ich bin es zufrieden, wenn man ihn, als ein Compendium der theoretischen Elementar-Mathematik betrachten will: allein ich bitte ihn von dieser Seite nicht allein zu beurtheilen, sonst wird man den Vortrag viel zu weitläuftig finden. Man wird Wiederholungen bemerken, die ich leicht hätte vermeiden können, wenn ich mich allein der strengen synthe-

tischen Lehrart hätte bedienen wollen, wie ich es in meiner im Jahr 1760 herausgegebenen Matheſi Theoretica gethan habe. Dies habe ich hier denen zu gefallen nicht thun wollen, die mein Buch brauchen wollen, durch eigenen Fleis ſich weiter zu helfen: ich weis nicht, ob ich hinzu ſetzen darf, daß ich es auch deswegen nicht habe thun wollen, weil bey den allerwenigſten Anfängern dieſe Lehrart gut angebracht iſt. Man wird hier überdem Lehren vermiſſen, die ſonſt in allen Compendien ſtehen, die Lehren von Ausziehung der Quadrat- und Cubik-Wurzeln, von den Logarithmen, ja die ganze ebene ſowohl als auch ſphäriſche Trigonometrie. Und dieſe habe ich weggelaſſen, weil nach meiner Ueberzeugung jeder Lehrer zufrieden ſeyn kan, wenn ſeine Zuhörer im erſten halben Jahr nur die hier vorgetragenen Lehren wohl faſſen. Die genannten Lehren werden im zweyten Theil nebſt andern folgen. Dieſer zweyte Theil iſt ebenfals fertig und ſchon ſeit Michaelis vor. Jahrs in

Da nun der Cylinder F*ab*G = 3FDG: so verhalten sich die drey Körper FDG, ADBE, F*ab*G, wie die Zahlen 1, 2, 3, und die Kugel enthält zwey Drittheile eines Cylinders, dessen Grundfläche ihrem grösten Kreise, und dessen Höhe ihrem Durchmesser gleich ist.

395 §.

Ein paar Kugeln verhalten sich also wie ein paar Cylinder auf ihren grösten Kreisen in der Höhe der Durchmesser. Also ist ihr Verhältniß aus dem Verhältniß der grösten Kreise, und der Durchmesser zusammen gesetzt. Aber das Verhältniß der grösten Kreise ist das verdoppelte der Durchmesser (255 §). Also ist das Verhältniß der Kugeln aus dem Verhältniß der Durchmesser, oder Halbmesser, dreymahl genommen zusammen gesetzt, oder dies Verhältniß ist die ratio triplicata der Durchmesser.

Demnach verhalten sich ein paar Kugeln auch wie die Würfel ihrer Durchmesser, oder Halbmesser.

396 §.

Wenn der Durchmesser einer Kugel bekant ist, ihren Inhalt zu berechnen.

Aufl. Aus dem bekanten Durchmesser berechne man den Umfang (286 §), und sodann den Flächen-Inhalt ihres grösten Kreises (291 §). Hierauf nehme man $\frac{2}{3}$ des Products aus dieser Fläche in den Durchmesser: so ist der Inhalt der Kugel gefunden.

Wenn der Durchmesser 73 Fuß: so ist des grösten Kreises Umfang = 229,22 Fuß, seine Fläche = 4183,265 Q. F. Also die Kugel = $\frac{2}{3}$ × 4183, 265 × 73 = 203585,563 Cub. F.

Wenn der Durchmesser 100 ist: so ist die Fläche des grösten Kreises 7850, also die Kugel = 523333$\frac{1}{3}$. Dieserwegen verhält sich der Würfel des Durchmessers zum Inhalt der Kugel, wie 1000000 : 523333$\frac{1}{3}$ = 3000000 : 1570000 = 300 : 157, und man erhält auch den Inhalt einer Kugel, wenn man die Cubiczahl des Durchmessers mit der Zahl $\frac{157}{300}$ multiplicirt. So wäre auch im vorigen Exempel der Inhalt der Kugel = 389017 × $\frac{157}{300}$ = 203585, 563 C. F.

Zusatz

* * * * * *

Zusatz zum 23 §. der Rechenkunst.

Am Ende der III Regel in der hier gegebenen Auflösung setze man folgendes hinzu:

In dem einzigen Fall, wenn unter den ersten einzelnen Summen die Zahl 9 befindlich ist, kan diese Regel eine Ausnahme leiden, so daß man zum drittenmahl, ja zuweilen noch öfter wieder summiren müste, wenn sich nicht die ganze Arbeit nach der bald folgenden Vorschrift verkürzen liesse.

Am Ende des Beweises aber füge man folgendes bey:

Dafern anders diese Zahl 9 nicht unter den ersten einzelnen Summen schon befindlich ist.

Nachricht

* * * * * *

Nachricht die etwanigen Druckfehler betreffend.

Da ich die Vorrede aufsetze, habe ich von dem Buch selbst noch nicht völlig das erste abgedruckte Alphabeth in Händen, und würde also jetzt noch nicht alle Druckfehler aufsuchen können. Ich werde aber das Buch, sobald es ganz abgedruckt ist, mit allem Fleis durchgehen, und ein Verzeichnis der eingeschlichenen Druckfehler dem zweyten Theil beyfügen.

Ende des ersten Theils.

des Herrn Verlegers Händen. Ich hätte sehr gern gesehen, daß er mit dem ersten Theil zugleich hätte zur Ostermesse kommen können, weil beyde Theile in der genauesten Verbindung stehen, und alles enthalten, was zur theoretischen Elementar-Mathematik gehört. Kenner, wenn sie beyde Theile zugleich vor sich gehabt hätten, würden meinen ganzen Plan besser haben übersehen, und von der Einrichtung des ganzen auch in Absicht der künftigen Theile urtheilen können, wovon ich nur folgendes anführen will. Es sollen nach den beyden ersten theoretischen Theilen drey oder vier Theile von der praktischen Mathematik folgen, und zwar nach den vom H. H. Kästner in der obenangeführten Schrift gemachten Abtheilungen. Ich werde hier alles ausführlich vortragen, was davon ohne Hülfe der eigentlichen Algebra, die einfachen und quadratischen Gleichungen ausgenommen, gesagt werden kan. Hierauf wird die höhere sowohl theoretische als praktische Mathematik

folgen, so daß das ganze Werk, wenn ich es mit göttlicher Hülfe zu Ende bringen sollte, auf zwölf und vielleicht mehr Theile etwa von der Grösse, wie der gegenwärtige ist, anwachsen wird.

Bützow im April des Jahrs 1767.

Inhalt des ersten Theils.

Anfangsgründe der Rechenkunst.

Der I. Abschnitt. Von einigen Eigenschaften der Zahlen und ihrer Bezeichnung durch Ziffern.

Der II. Abschnitt. Von der Addition und Subtraction in ganzen Zahlen.

Der III. Abschnitt. Von der Multiplication mit ganzen Zahlen.

Der IV. Abschnitt. Von der Division mit ganzen Zahlen und dem Ursprung der Brüche.

Der V. Abschnitt. Von dem Unterscheid der Prim-Zahlen und zusammen gesetzten Zahlen.

Der VI. Abschnitt. Von den vier Rechnungsarten mit Brüchen.

Der VII. Abschnitt. Von den Decimal-Brüchen insbesondre.

Der VIII. Abschnitt. Von den vier Rechnungsarten in genannten Zahlen.

Der IX. Abschnitt. Von den Verhältnissen und Proportionen.

Der X. Abschnitt. Von der Regel Detri und ihrer Anwendung.

Der Geometrie erster Theil.

Die ebene Geometrie.

Der I. Abschnitt. Von den graden Linien und Winkeln.

Der II. Abschnitt. Vom Umfang der ebenen Figuren überhaupt und insbesondre von der Kreislinie.

Der III. Abschnitt. Von den Dreyecken und Parallellinien.

Der IV. Abschnitt. Von den Parallelogrammen und ihre Vergleichung sowohl unter sich, als auch mit den Dreyecken.

Der

Der V. Abschnitt. Vom Kreise und den regulären Polygonen.

Der VI. Abschnitt. Allgemeine Lehren von den Verhältnissen und Proportionen.

Der VII. Abschnitt. Von der Aehnlichkeit der Figuren.

Der VIII. Abschnitt. Von den zusammen gesetzten Verhältnissen.

Der IX. Abschnitt. Von der Vergleichung des Flächen-Inhalts der Figuren.

Anwendung der Rechenkunst auf die ebene Geometrie.

Der X. Abschnitt. Von der Ausmessung grader Linien und Winkel.

Der XI. Abschnitt. Von der Ausmessung ebener Figuren.

Der Geometrie zweyter Theil.

Die körperliche Geometrie

nebst

Berechnung der körperlichen Größen.

Der XII. Abschnitt. Von den verschiedenen Lagen grader Linien und ebener Flächen gegen andre ebene Flächen.

Der XIII. Abschnitt. Von den Prismatischen Körpern und Pyramiden.

Der XIV. Abschnitt. Vom Cylinder und Kegel.

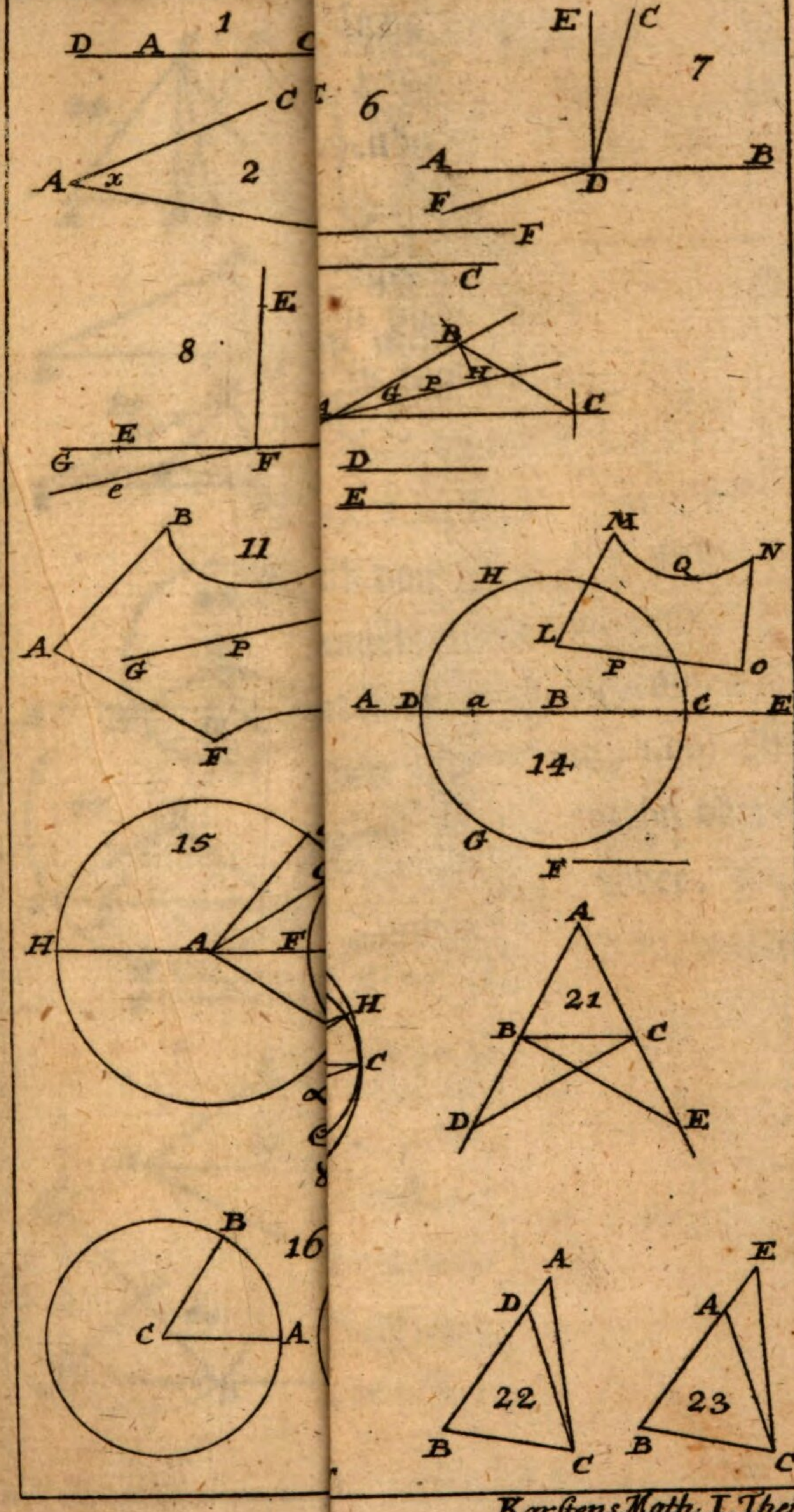
Der XV. Abschnitt. Vom Inhalt der Kugel.

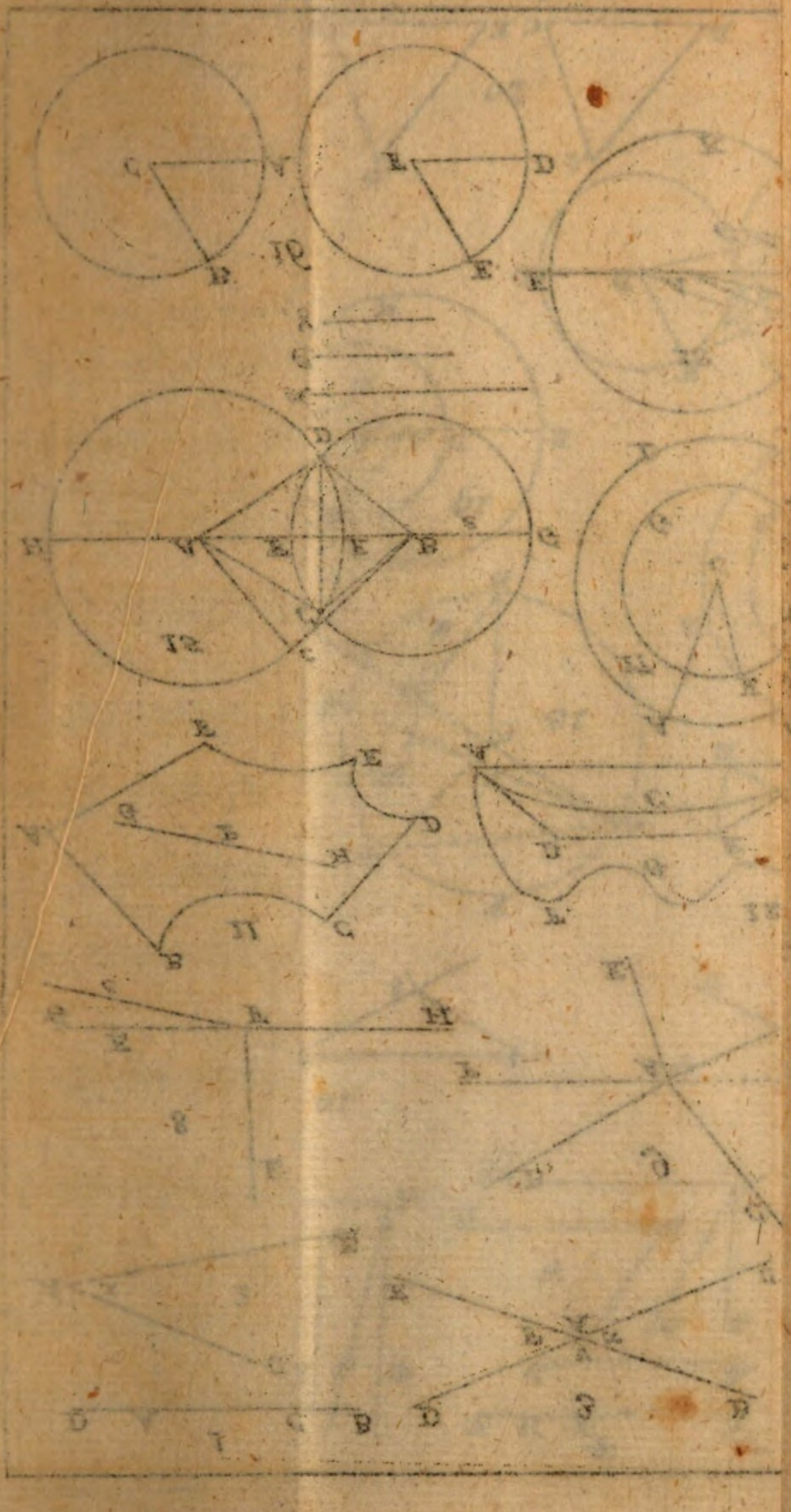
Anfangs-

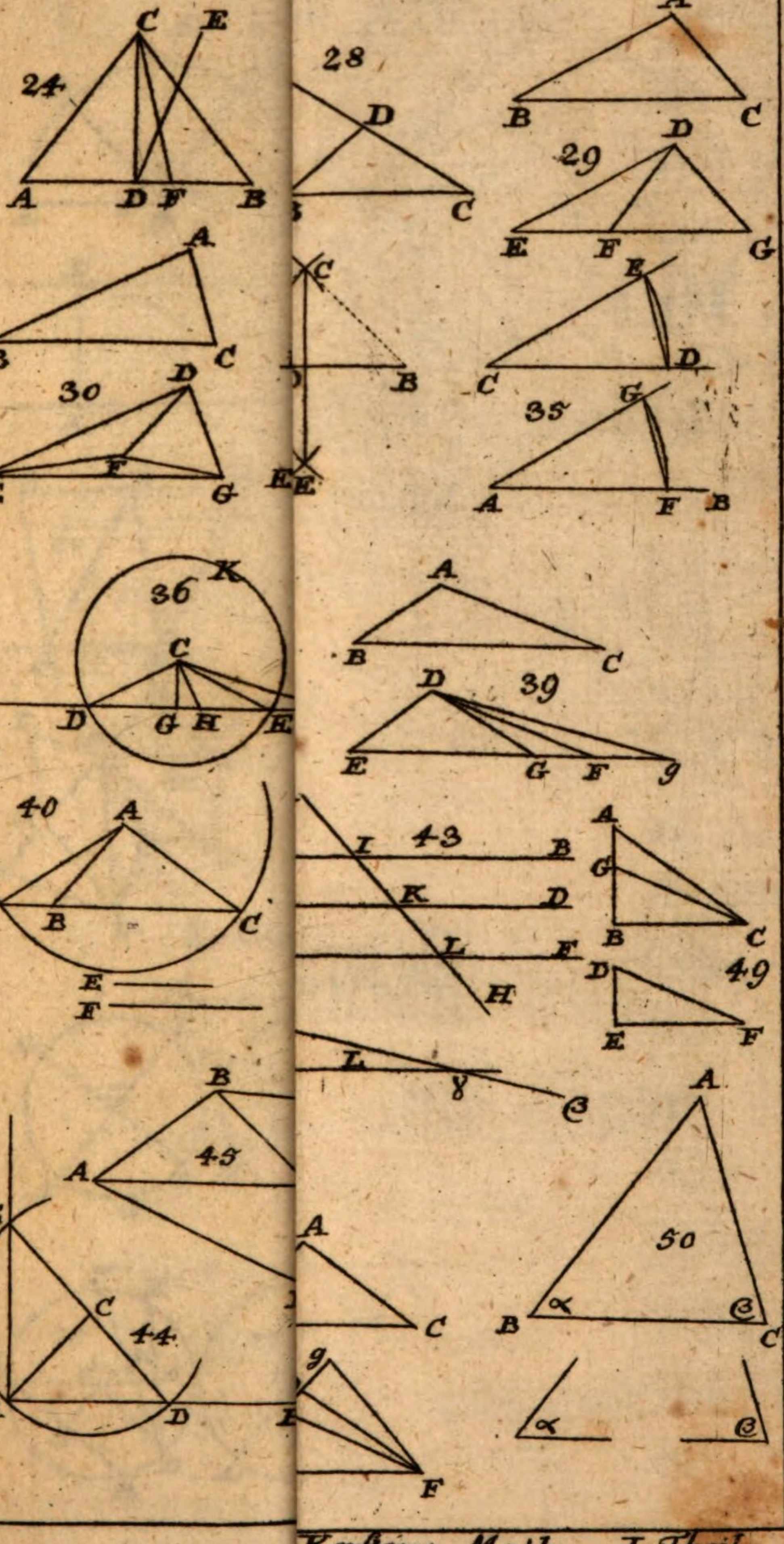
Bayerische Staatsbibliothek München

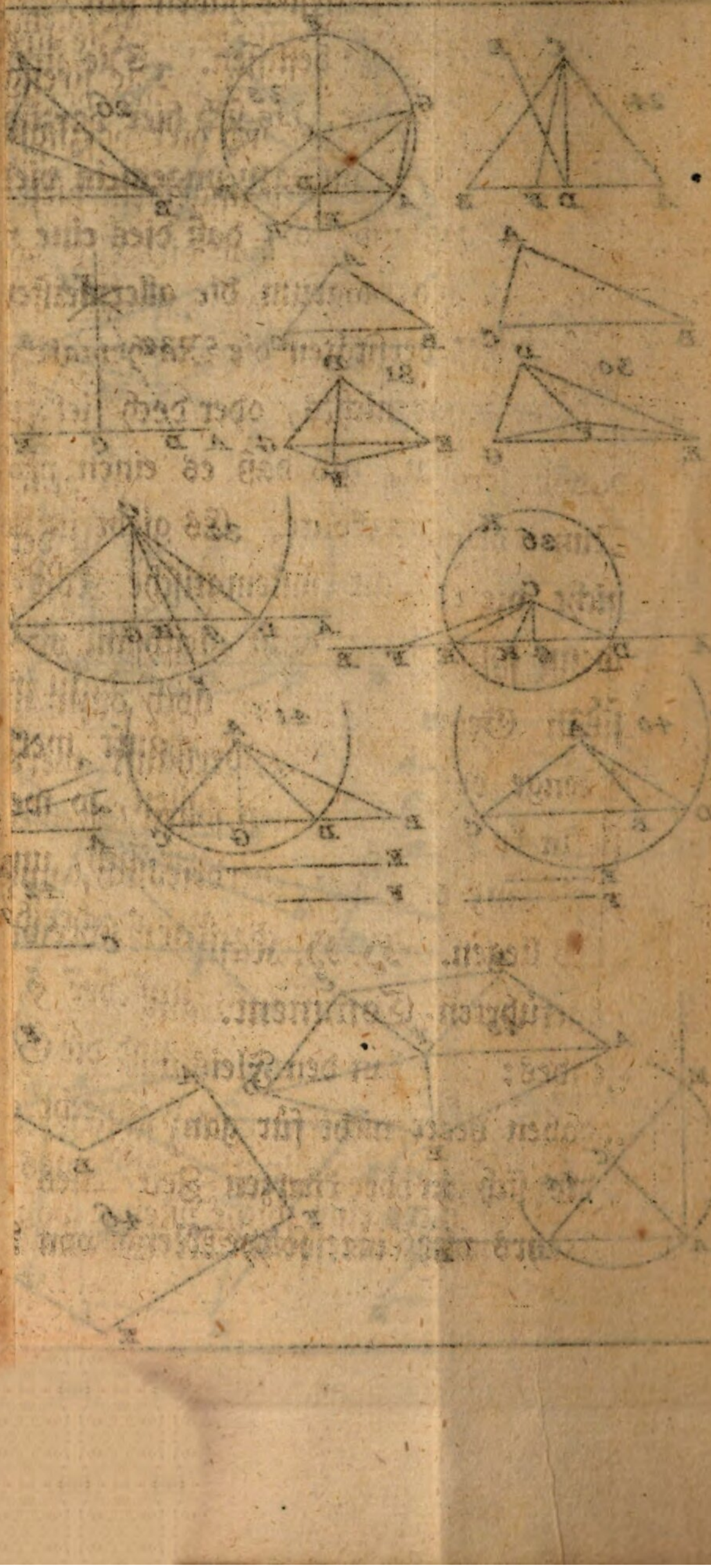
Von der Anwendung der Algebra auf die Geometrie.

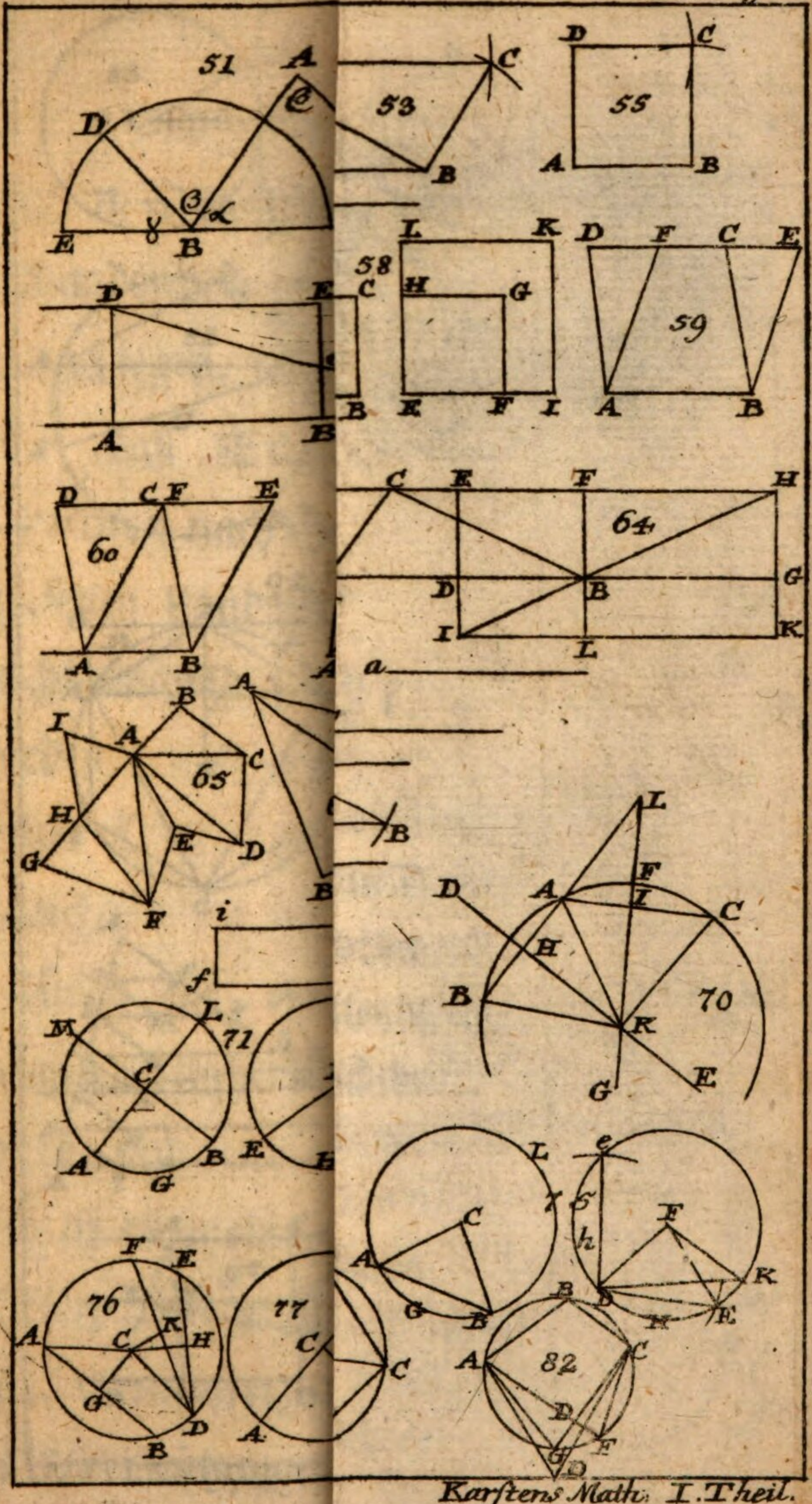
Geometrie.

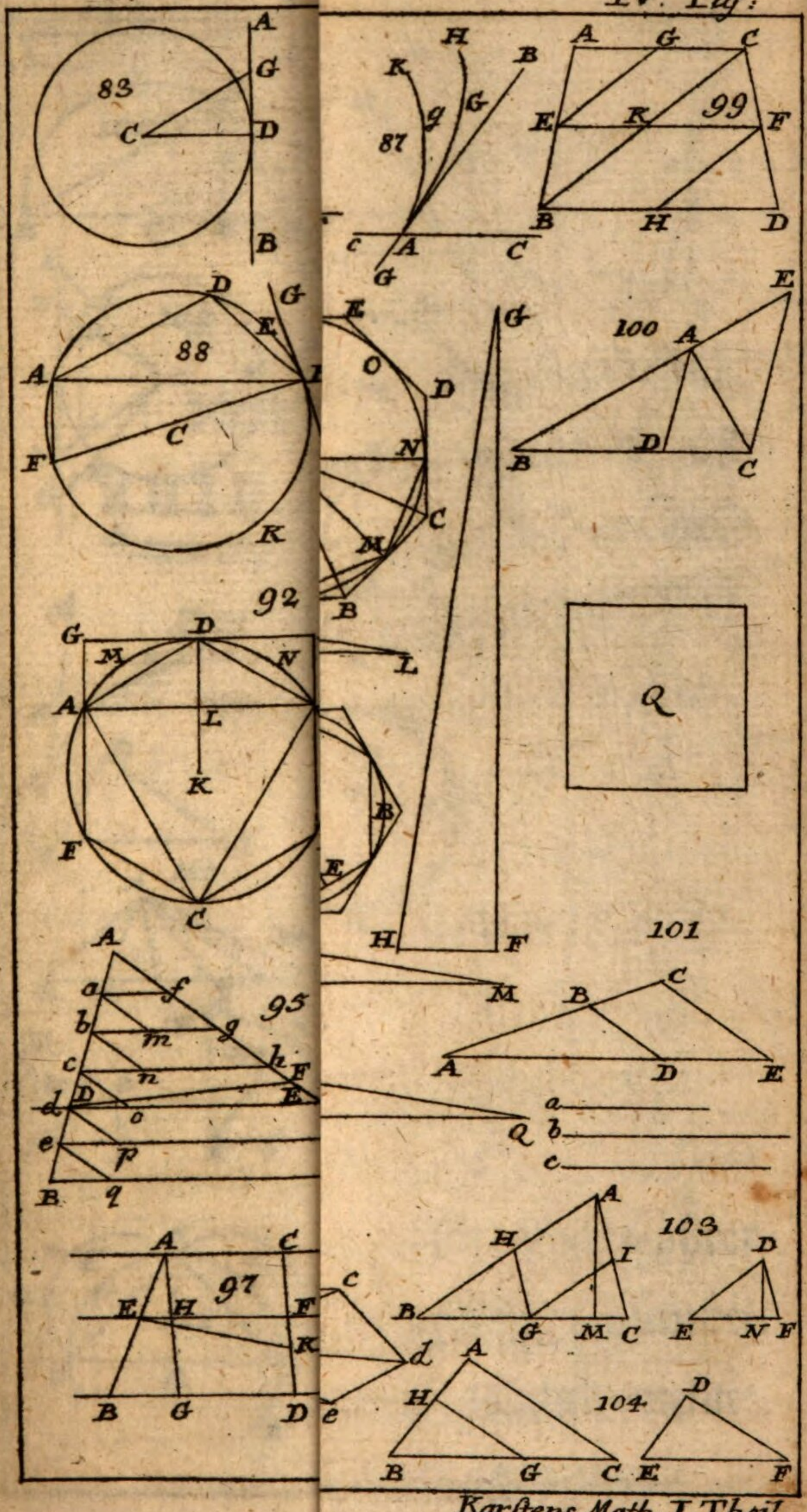

1
D A C
2
A x C
6
7
E C
A B
F D
F
C
8
E
E
G F
c
B
G P H
C
D
E
11
B
A
G P
F
M
N Q
H
L
F O
A D a B C E
14
G
F
15
H A F
H
C
α
21
A
B C
D E
16
B
C A
22
A
D
B C
23
E
A
B C

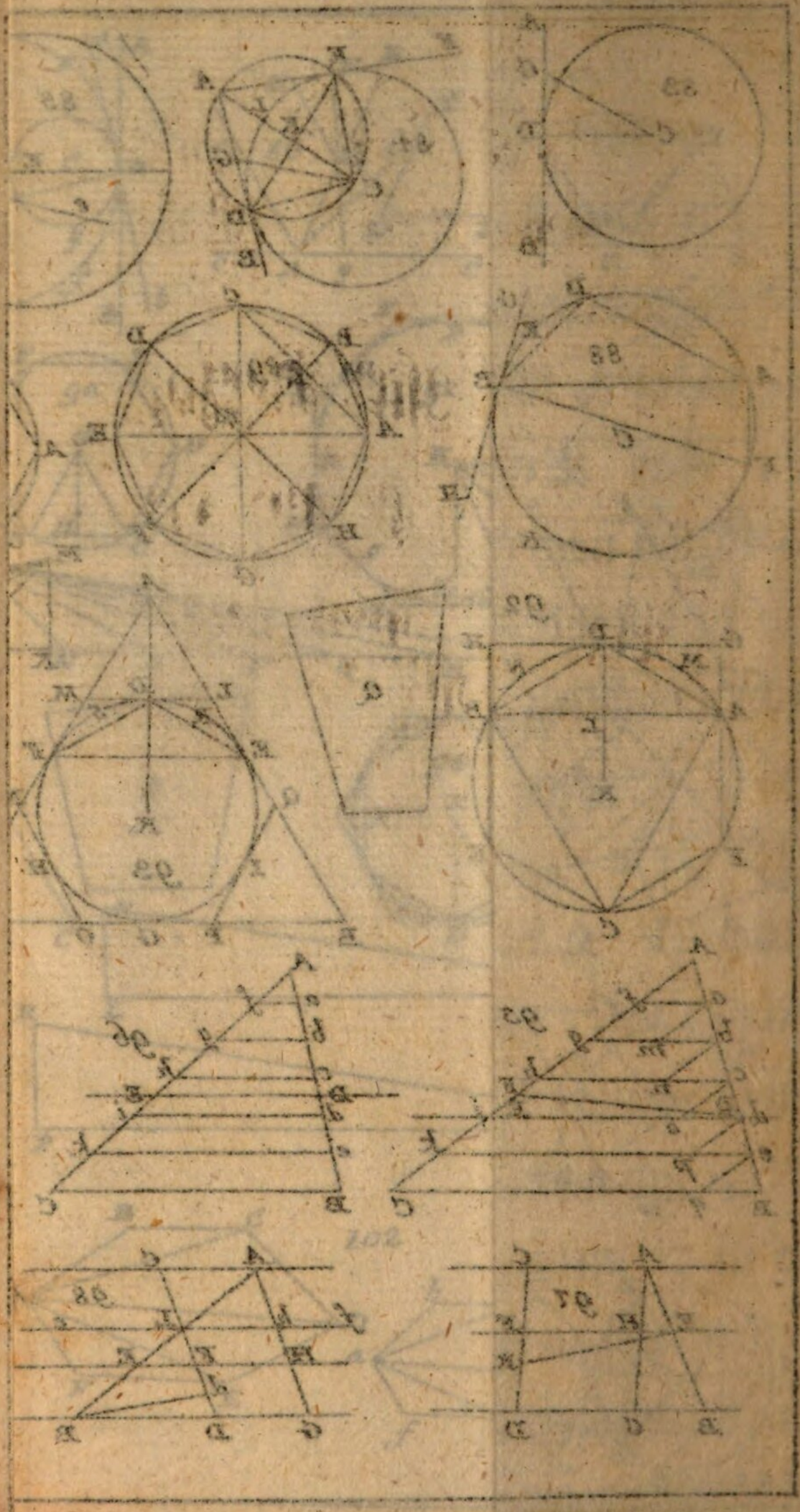


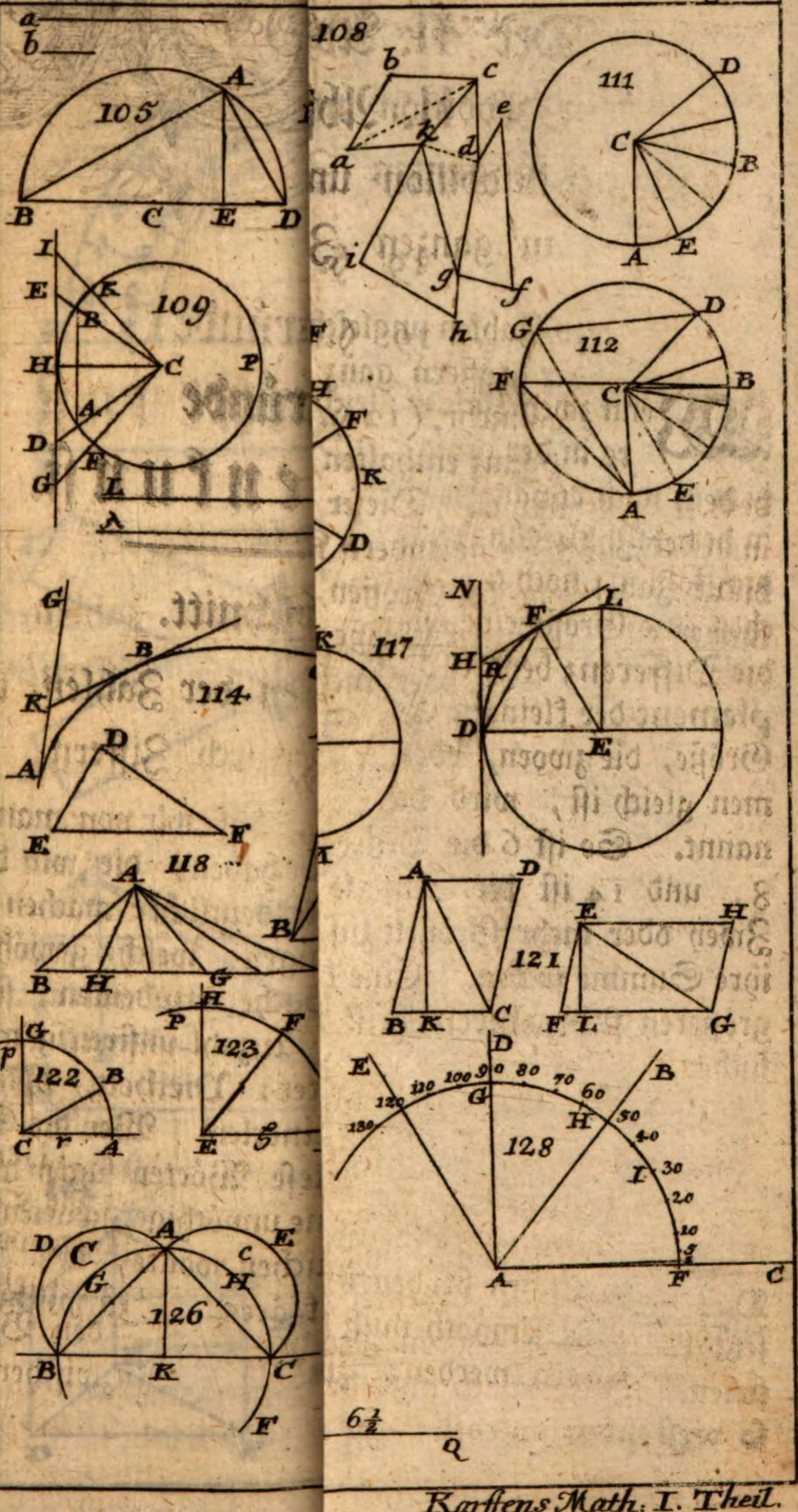

24
C E
A D F B
28
D
C
A
B C
29
D
E F G
A
B C
C
B
E
C D
30
D
E F G
35
G
A F B
36
K
C
A D G H E
A
B C
39
D
E G F g
40
A
D B C
E
F
43
I B
K D
L F
H
L
g
C
A
G
B C
D
49
E F
45
B
A
E
C
44
A D
A
C
50
B C
g
F

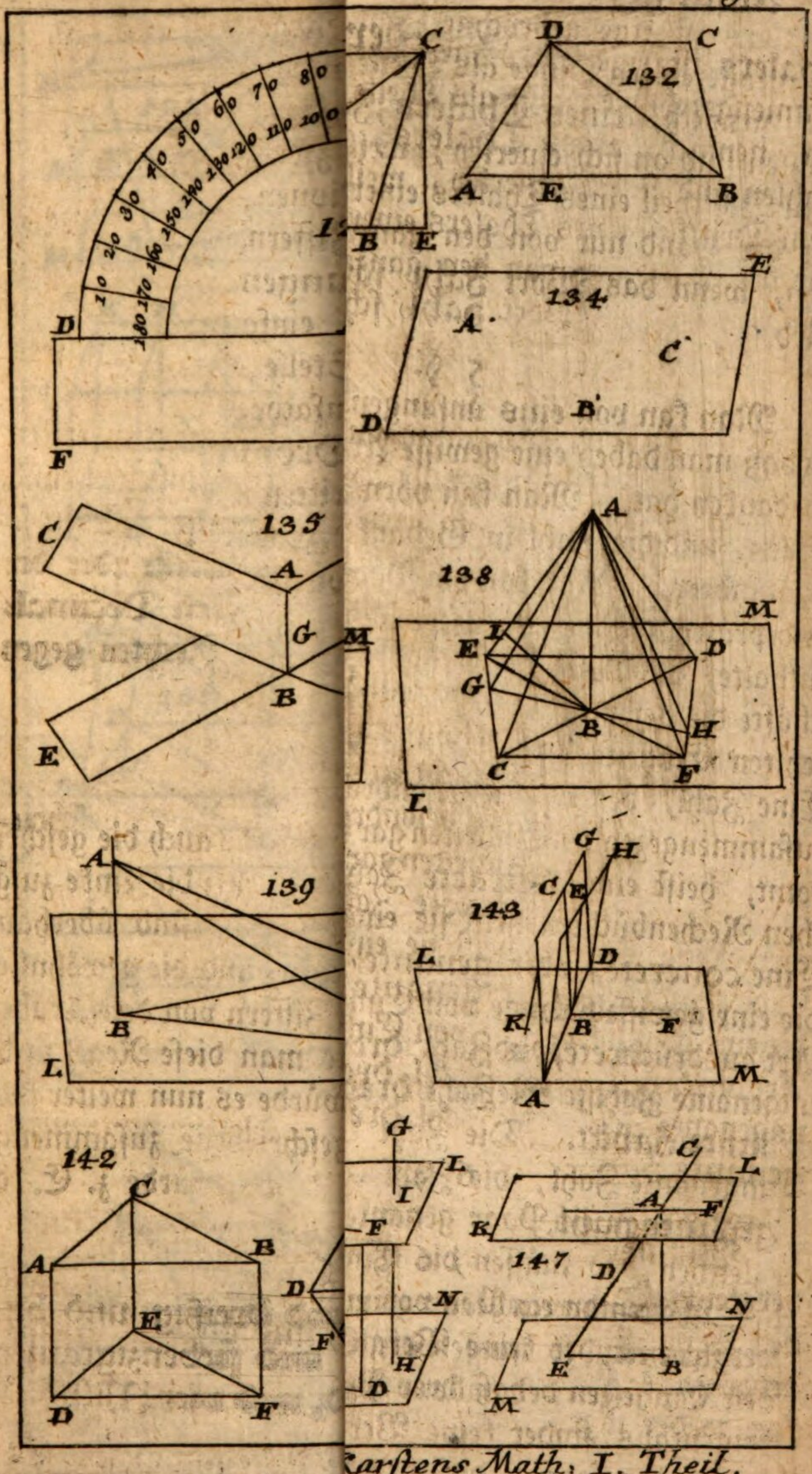


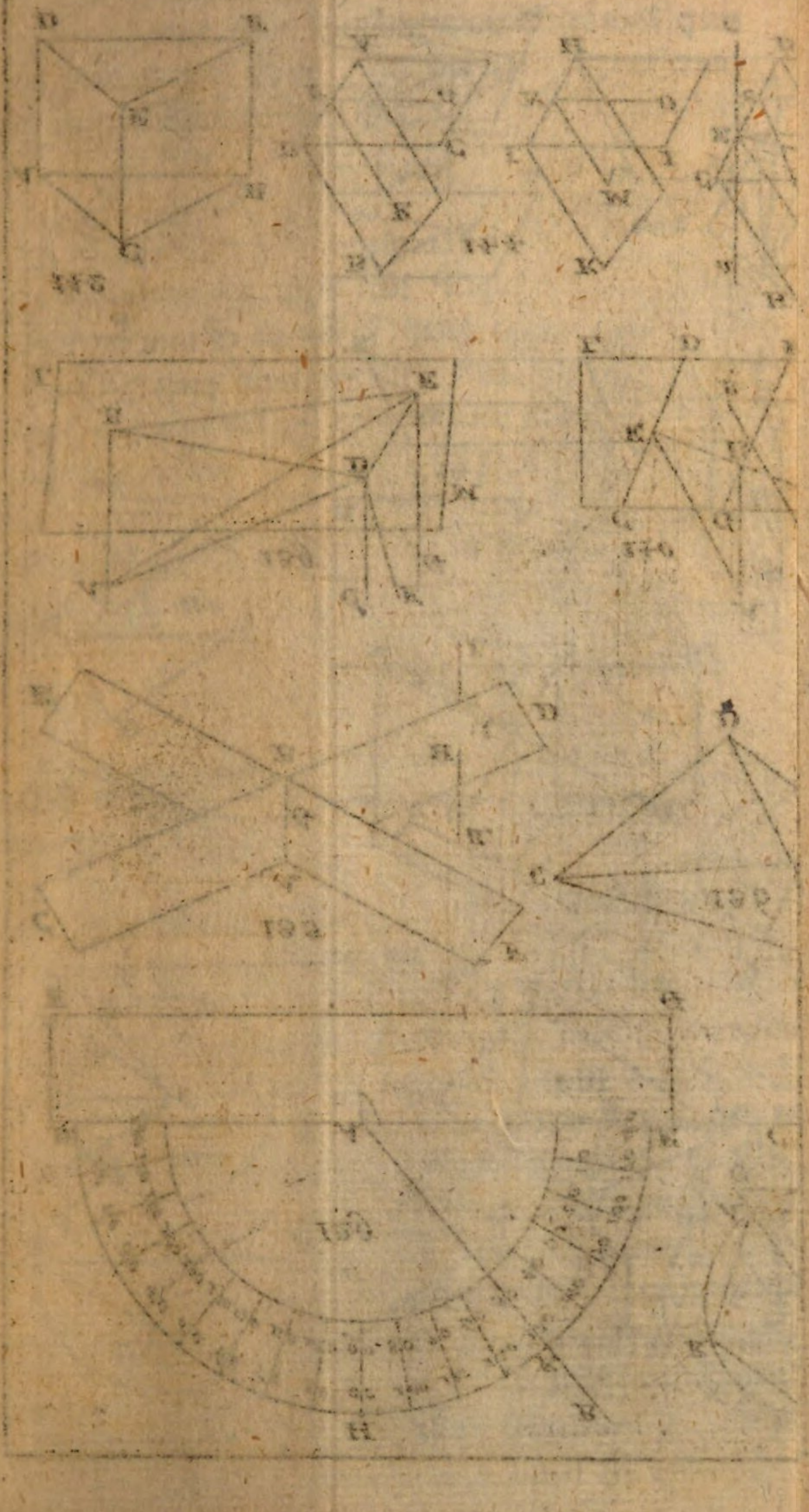

51
53
55
58
59
60
64
65
70
71
76
77
82
a
f
i


83
A
G
C
D
B
87
H
K
g
G
B
c
A
C
G
99
A
G
C
E
K
F
B
H
D
88
D
G
E
A
C
F
K
92
G
D
M
N
L
A
L
K
F
C
B
E
H
G
E
O
D
N
C
M
B
100
E
A
D
B
C
Q
101
M
B
C
A
D
E
a
b
c
95
A
a
f
b
m
g
c
n
h
F
d
D
E
o
e
p
B
q
Q
97
A
C
E
H
F
K
B
G
D
c
d
e
103
A
H
I
B
G
M
C
D
E
N
F
104
A
H
B
G
C
D
E
F

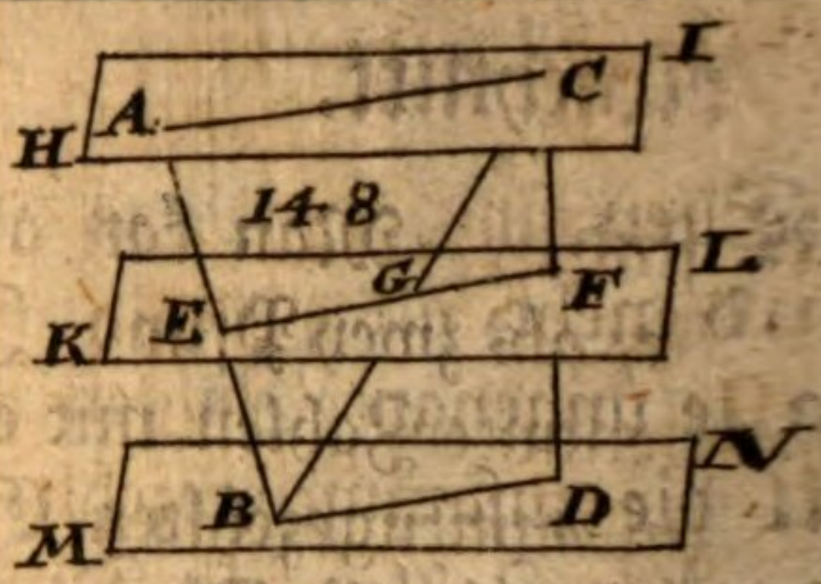



a
b
105
A
B C E D
108
b c
a d e
i g f h
111
D
C
B
A E
109
I
E K
B
H C P
A
D F
G L
λ
112
D
G
F C B
A E
H
F
K
D
114
G
B
K
A
D
E F
117
K
A
N
F L
H R
D E
118
A
B
B H G
A D
121
B K C
E H
F L G
H
P F
123
E
G
p
122
B
C r A
D
E
100 90 80 70 60
120 110
130
G
H 50
40
128
I 30
20
10
9
A F C
D C A E
c
G H
126
B K C
F
6½
Q


C
D
C
132
A
E
B
B
E
134
E
A
C
D
B
F
135
C
A
G
M
B
E
138
A
M
L
E
D
G
B
H
C
F
L
A
139
B
L
G
H
C
E
143
L
D
K
B
F
A
M
142
C
A
B
E
D
F
G
L
I
F
D
N
F
H
D
C
L
A
F
K
147
D
N
E
B
M

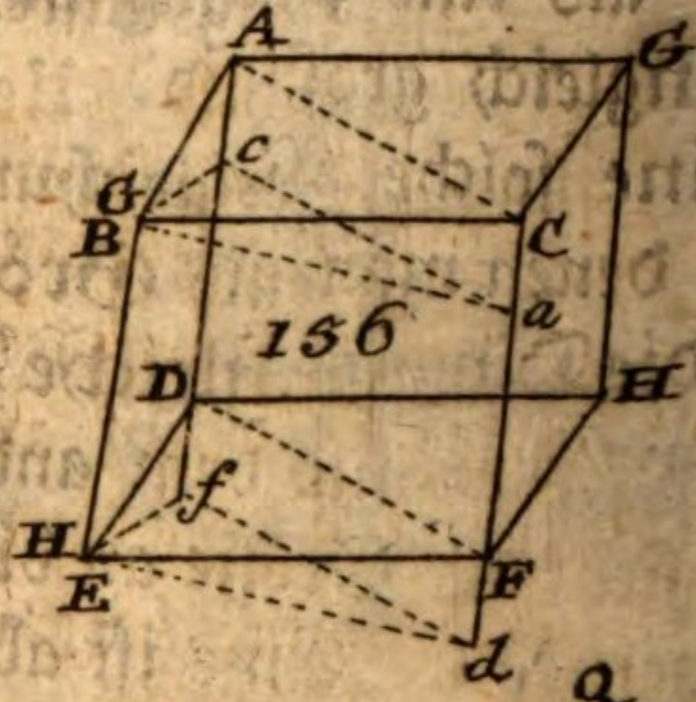


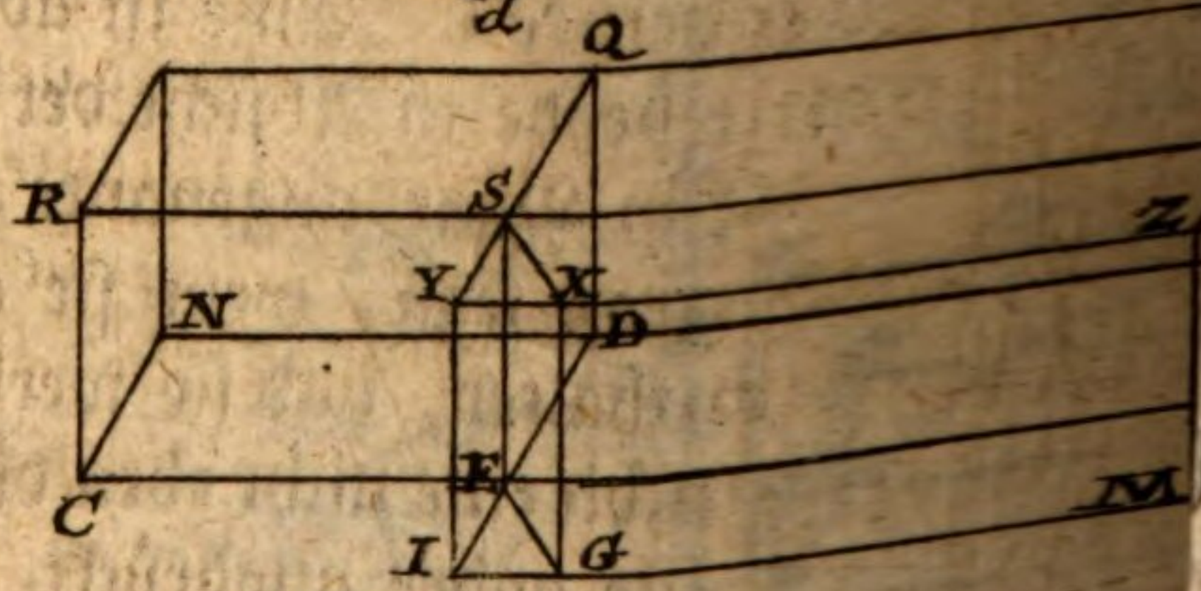
148



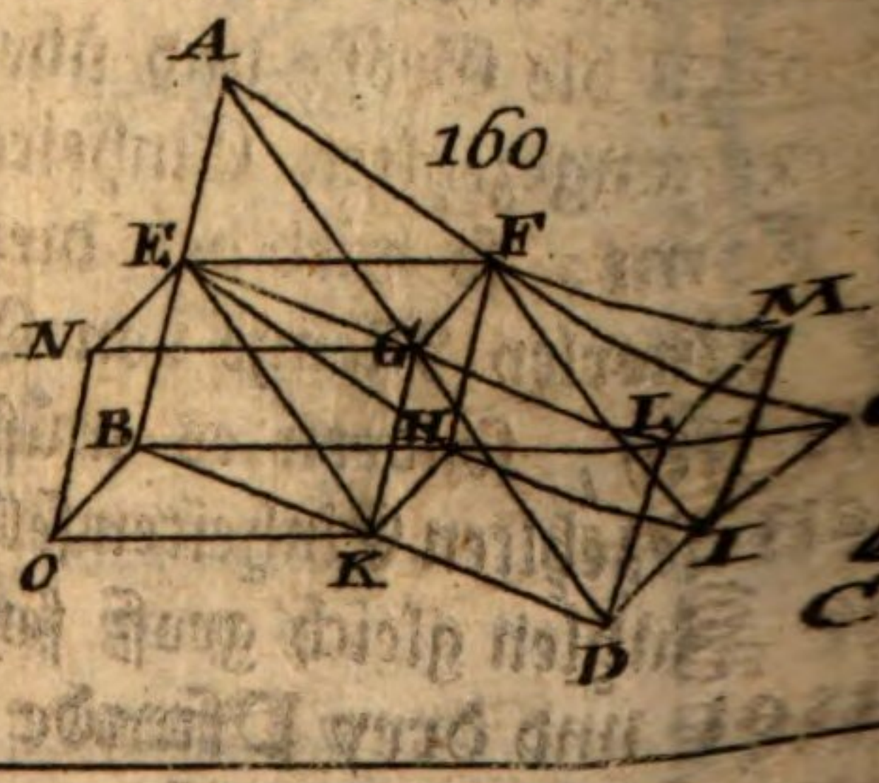
153

156

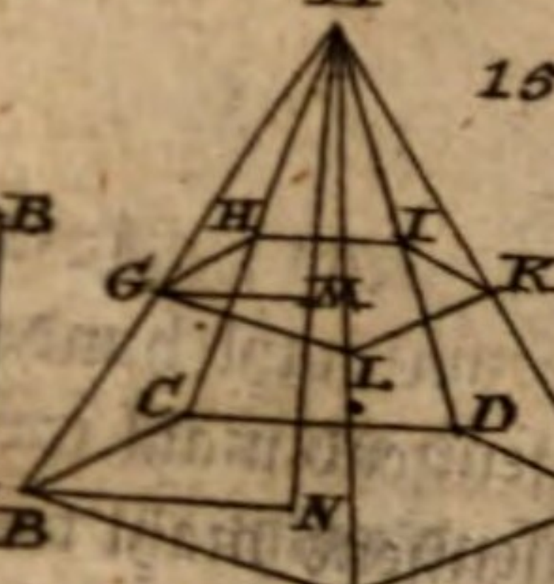


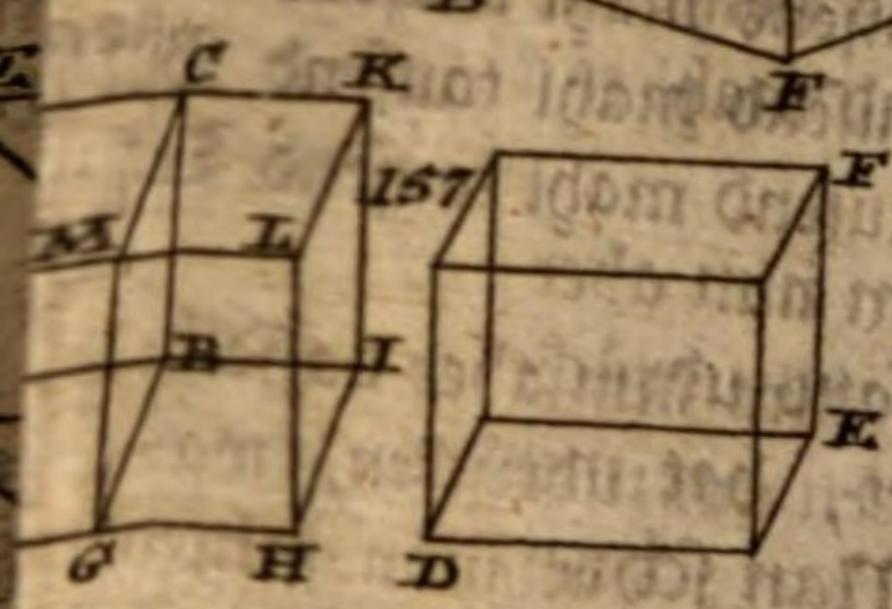


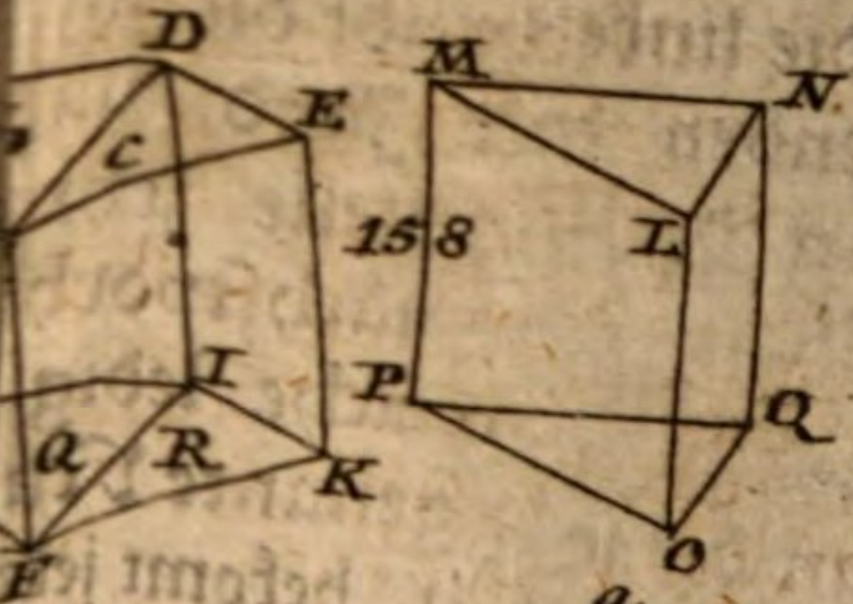
160

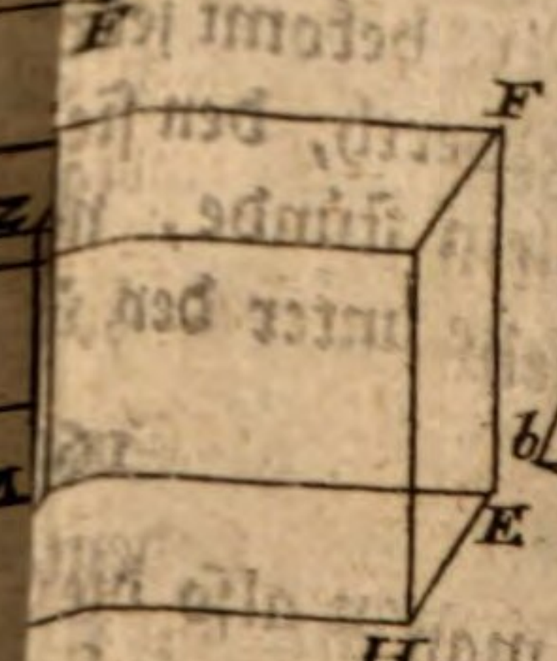


151

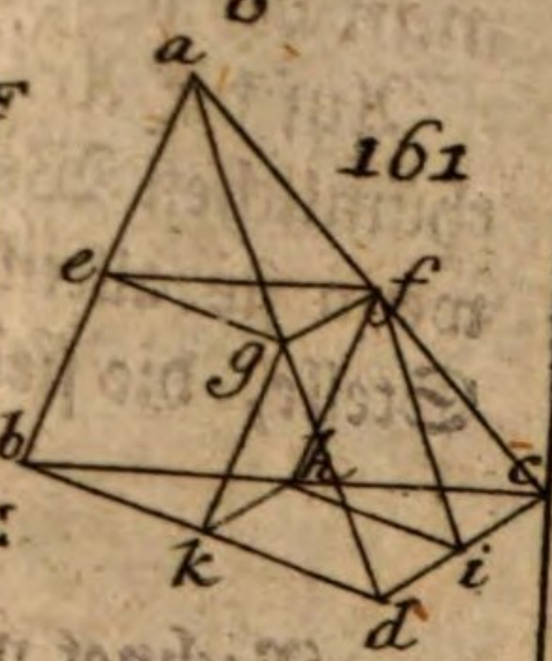




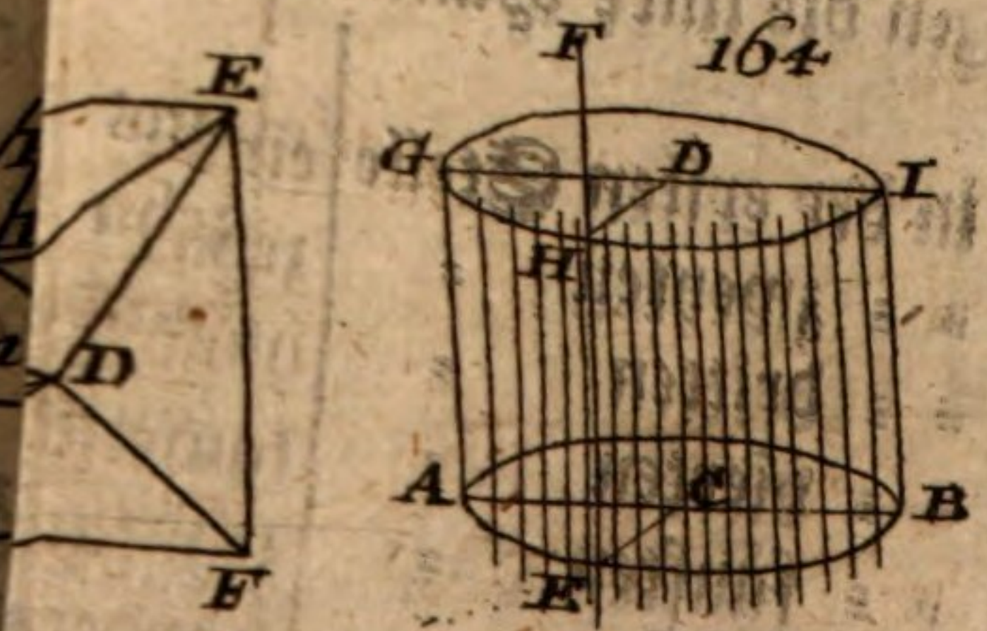


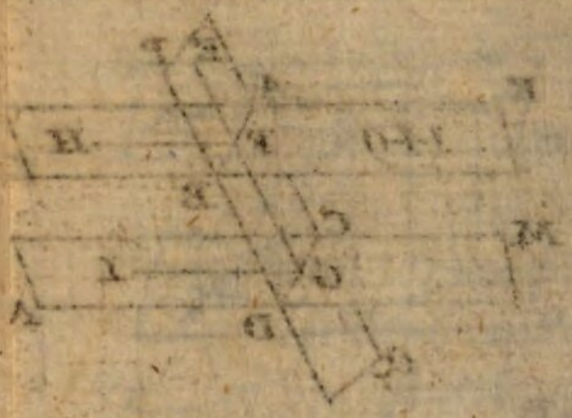


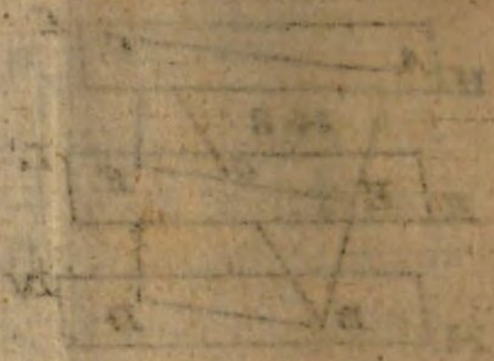
161

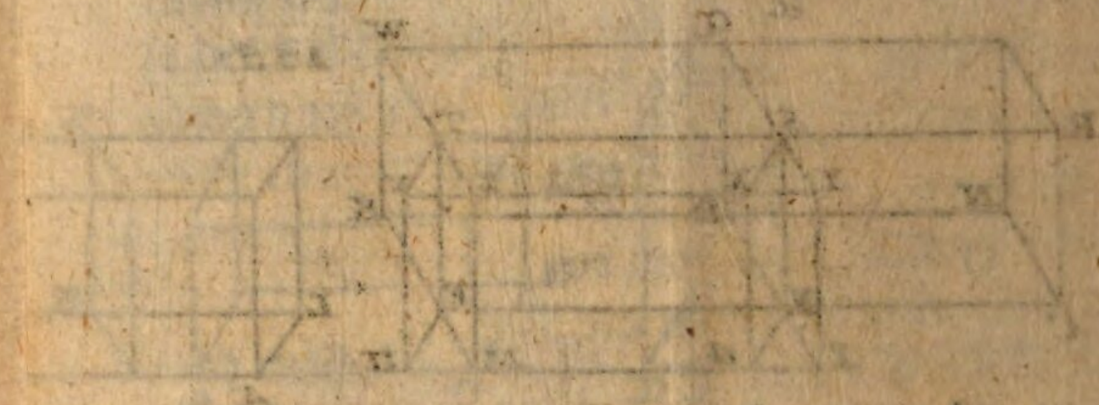


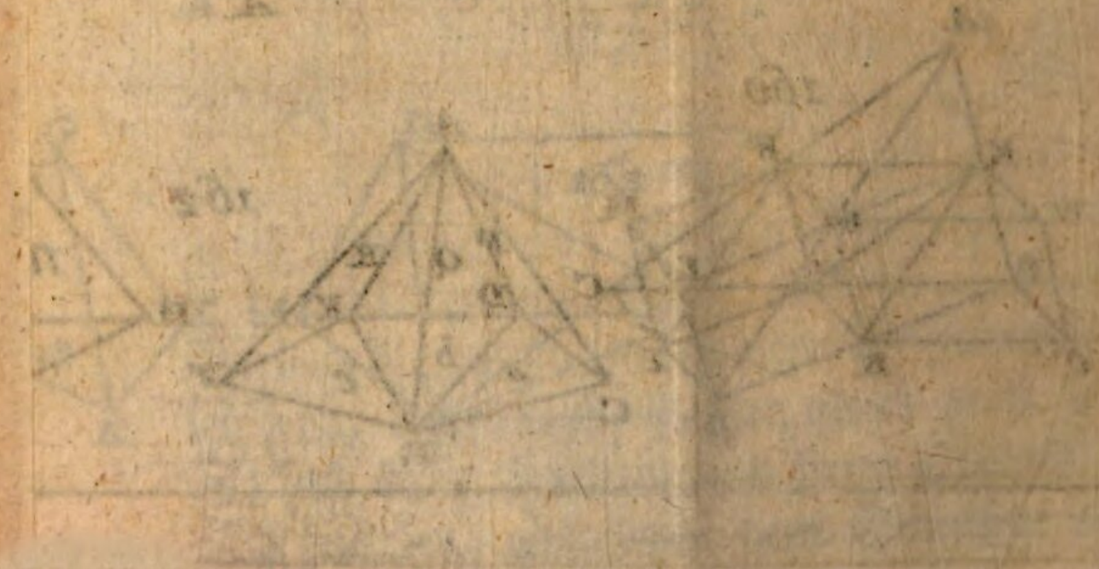
164



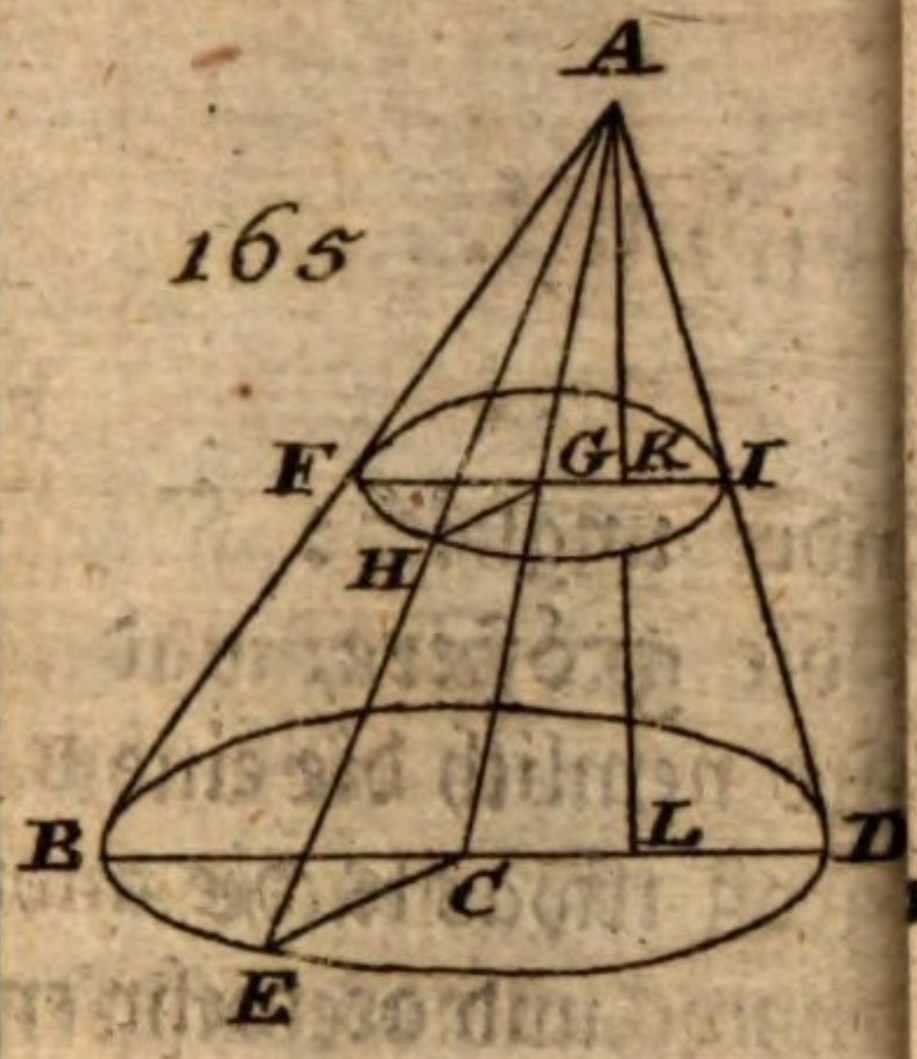




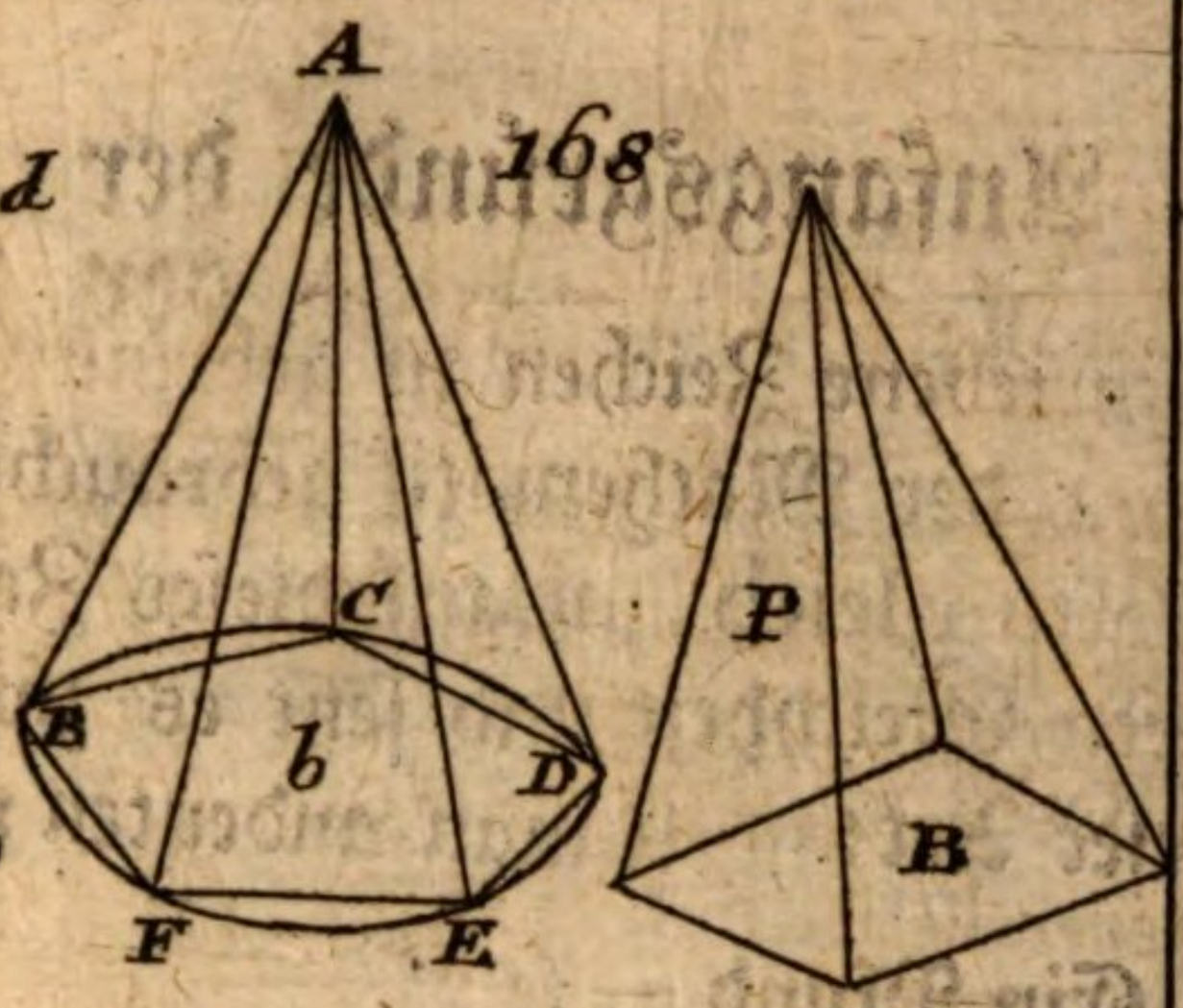




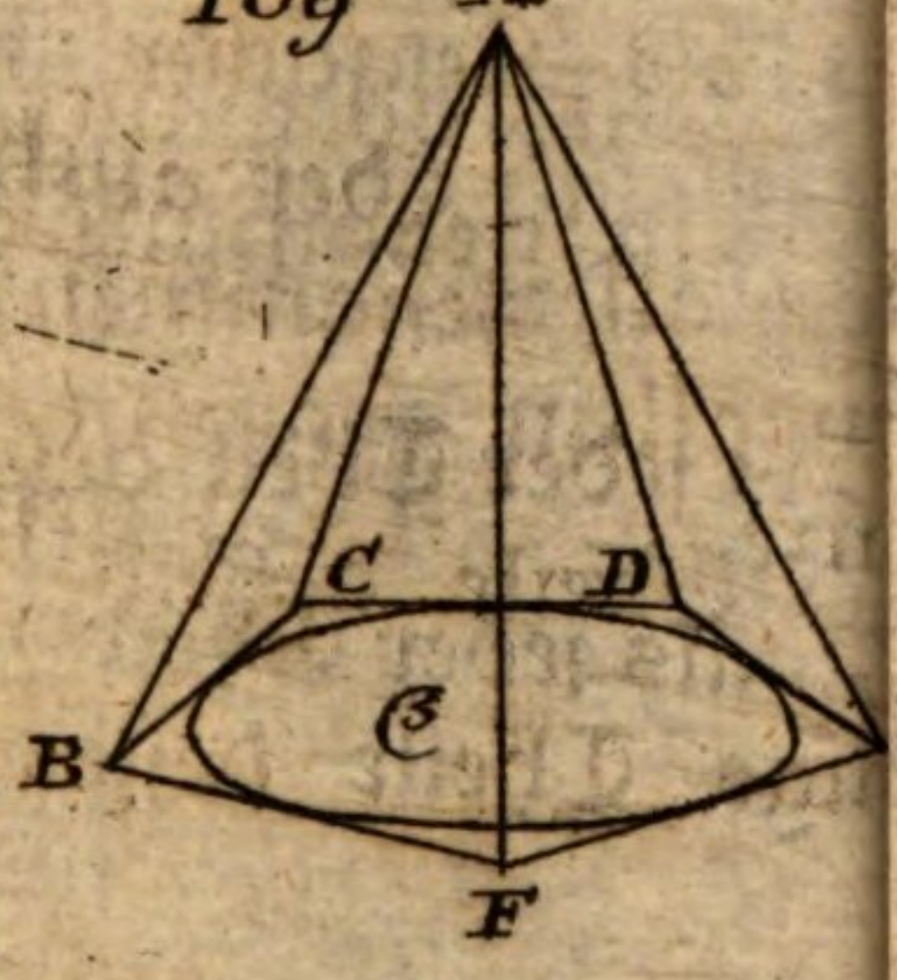
165



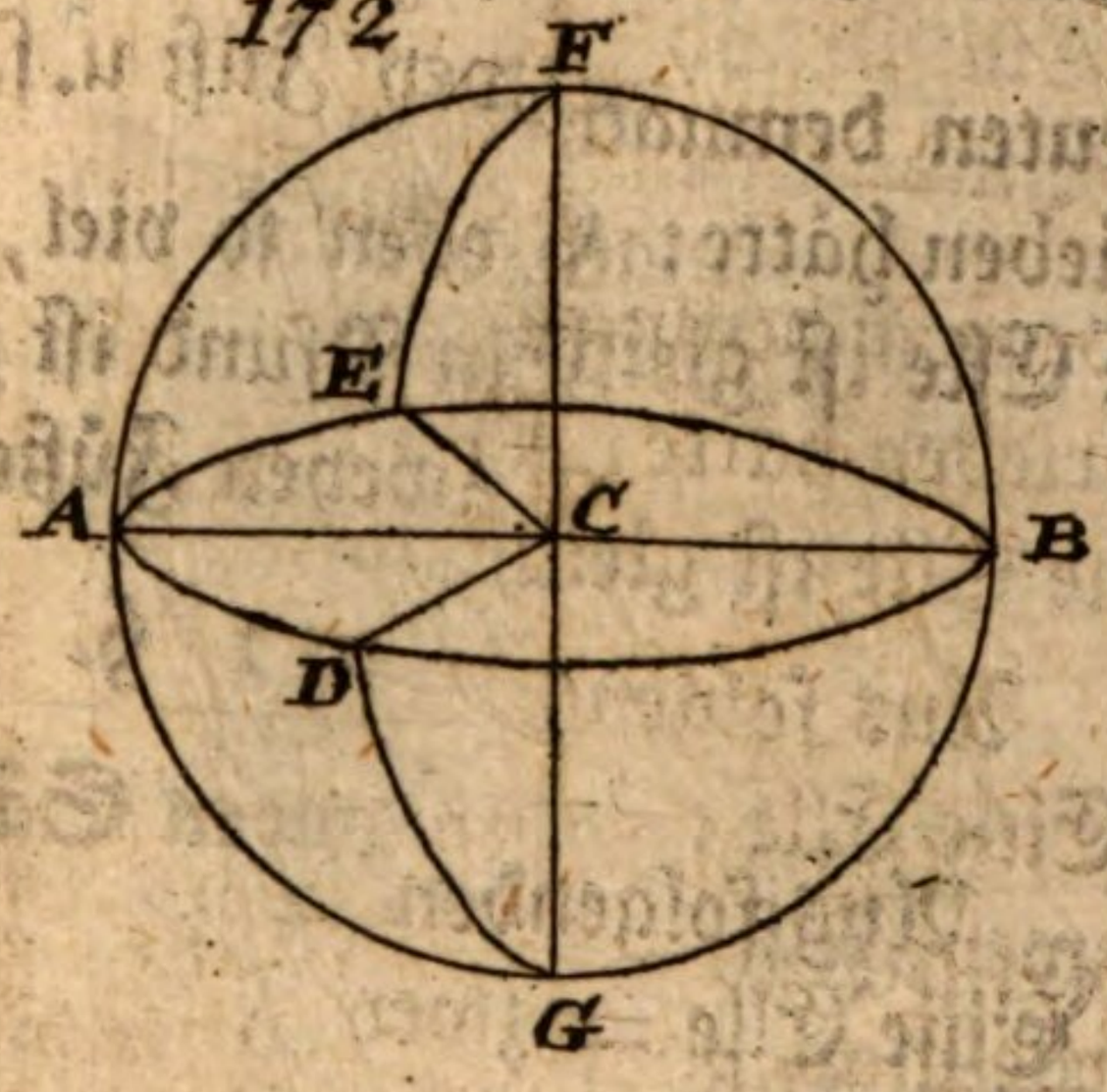
168



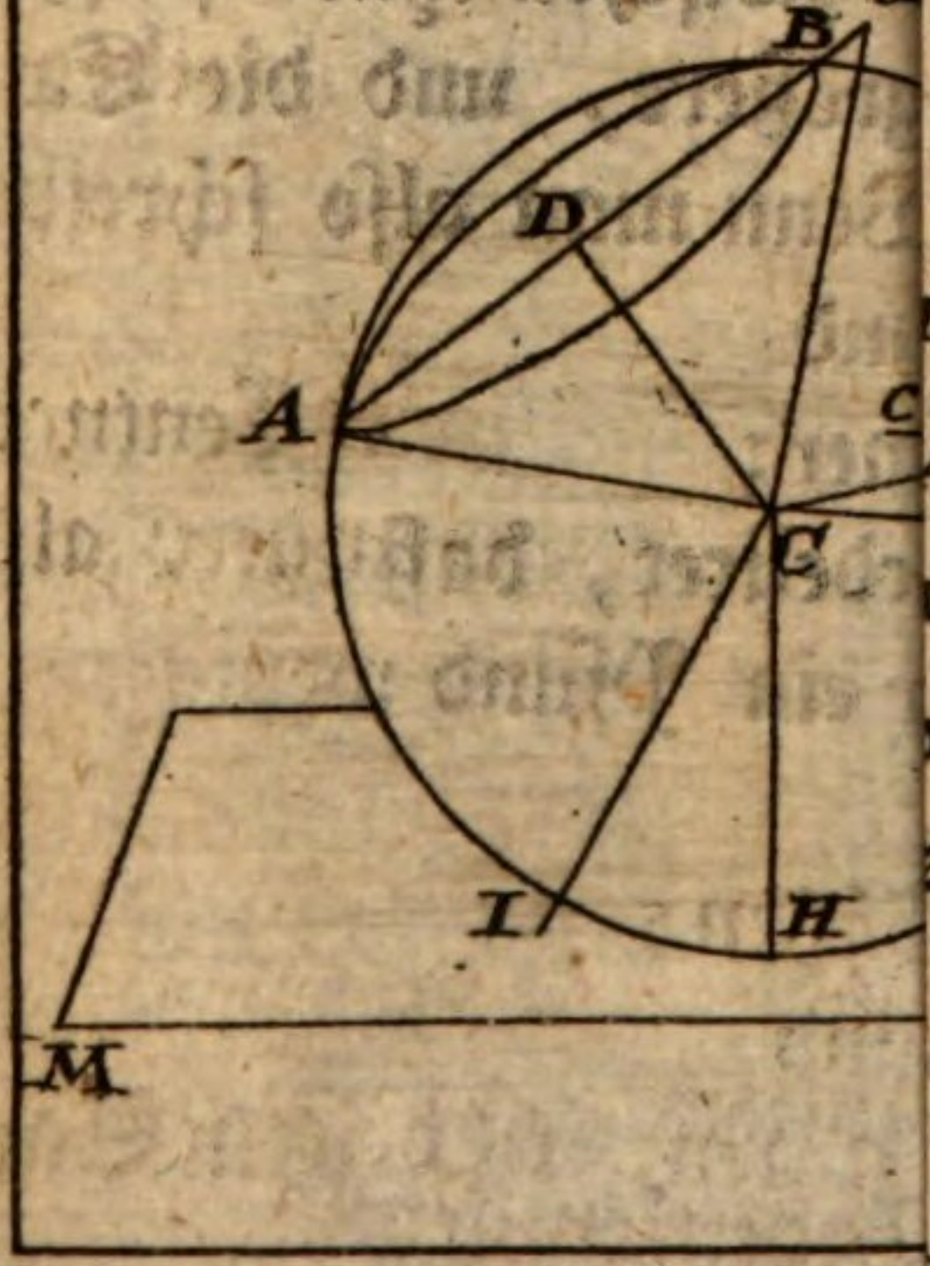
169



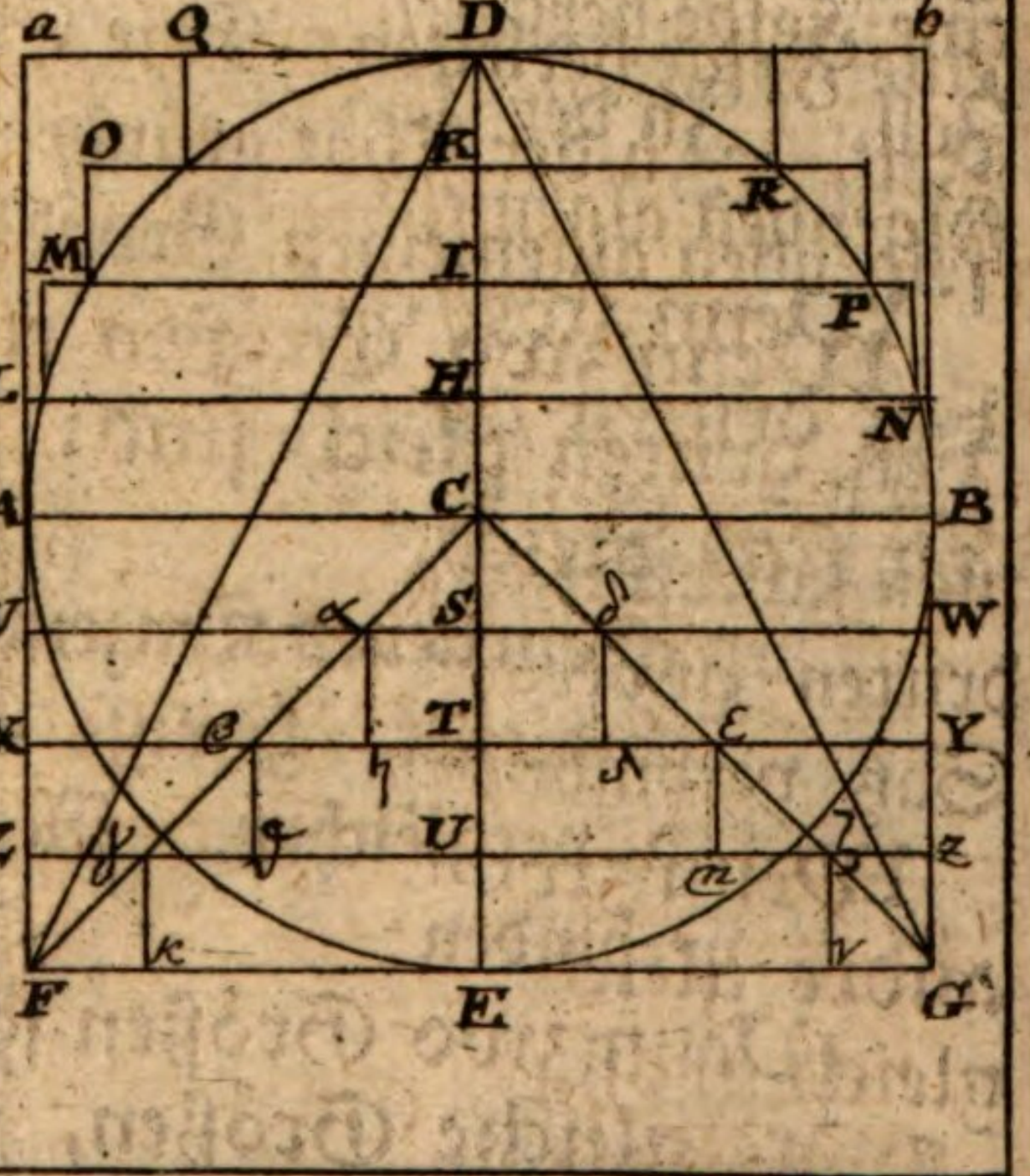
172

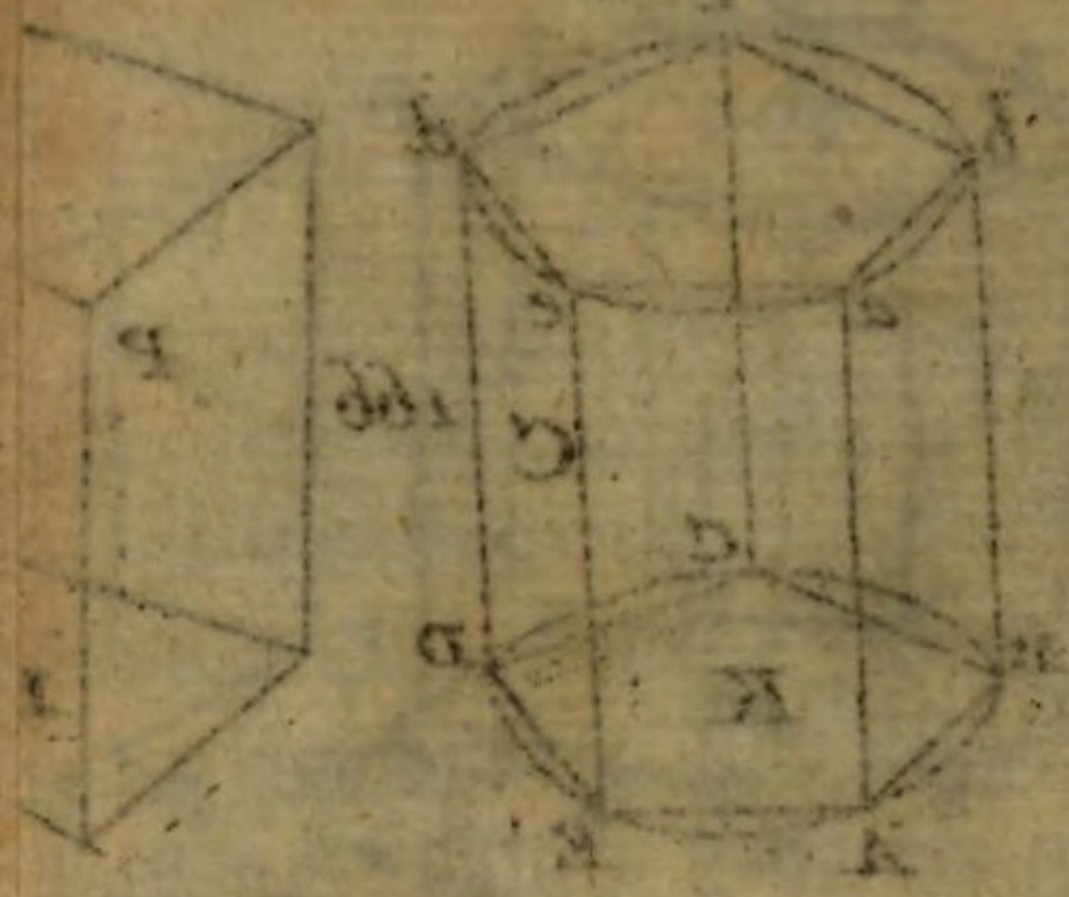


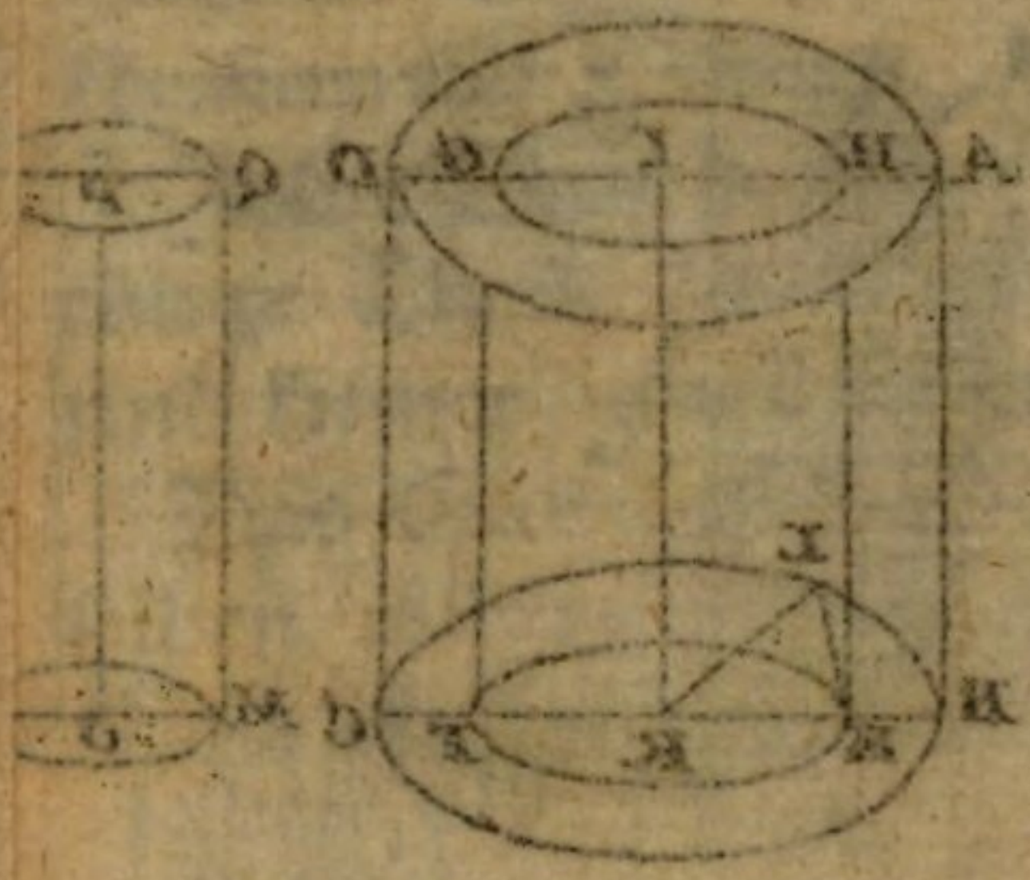
173

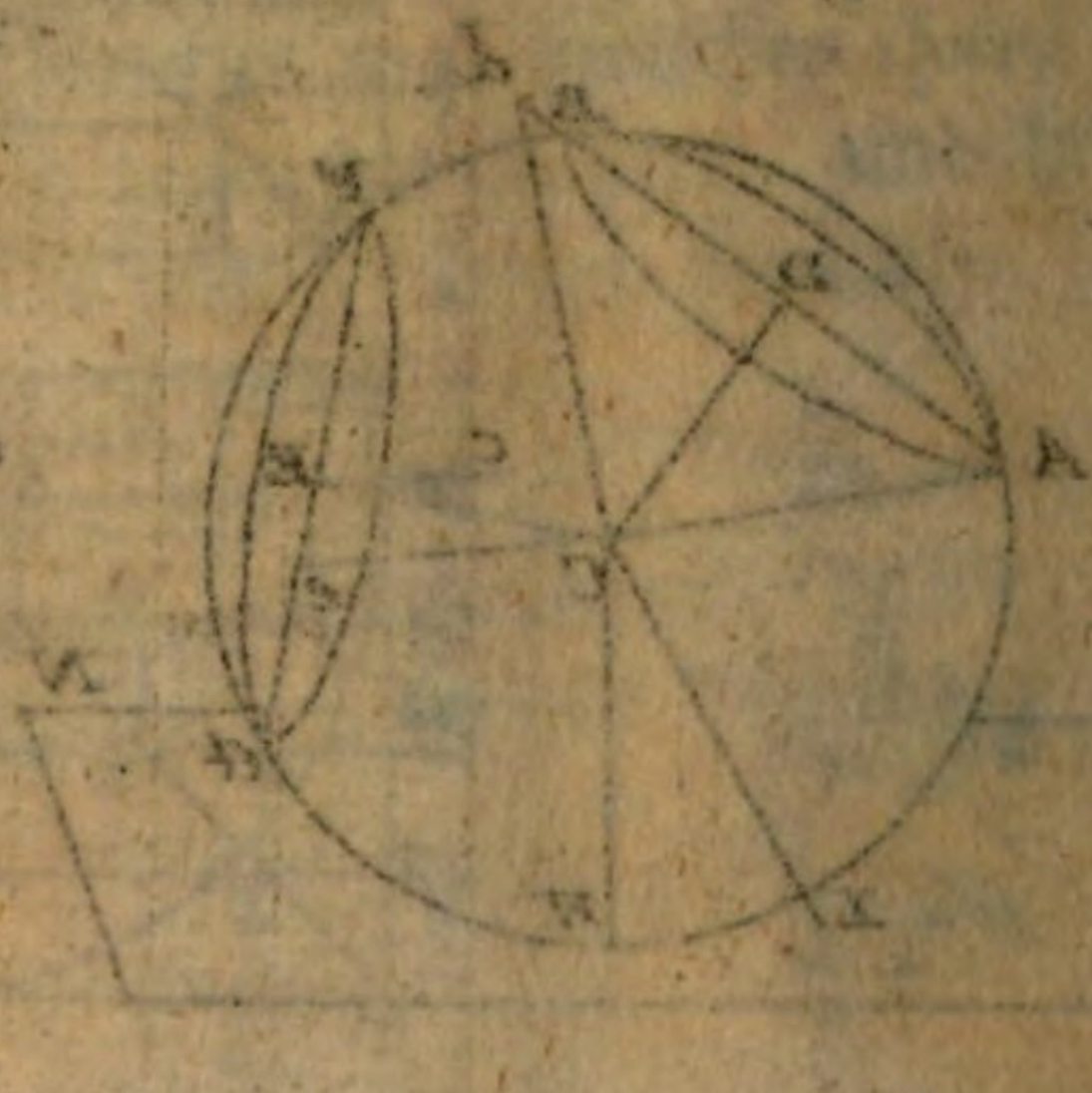


176

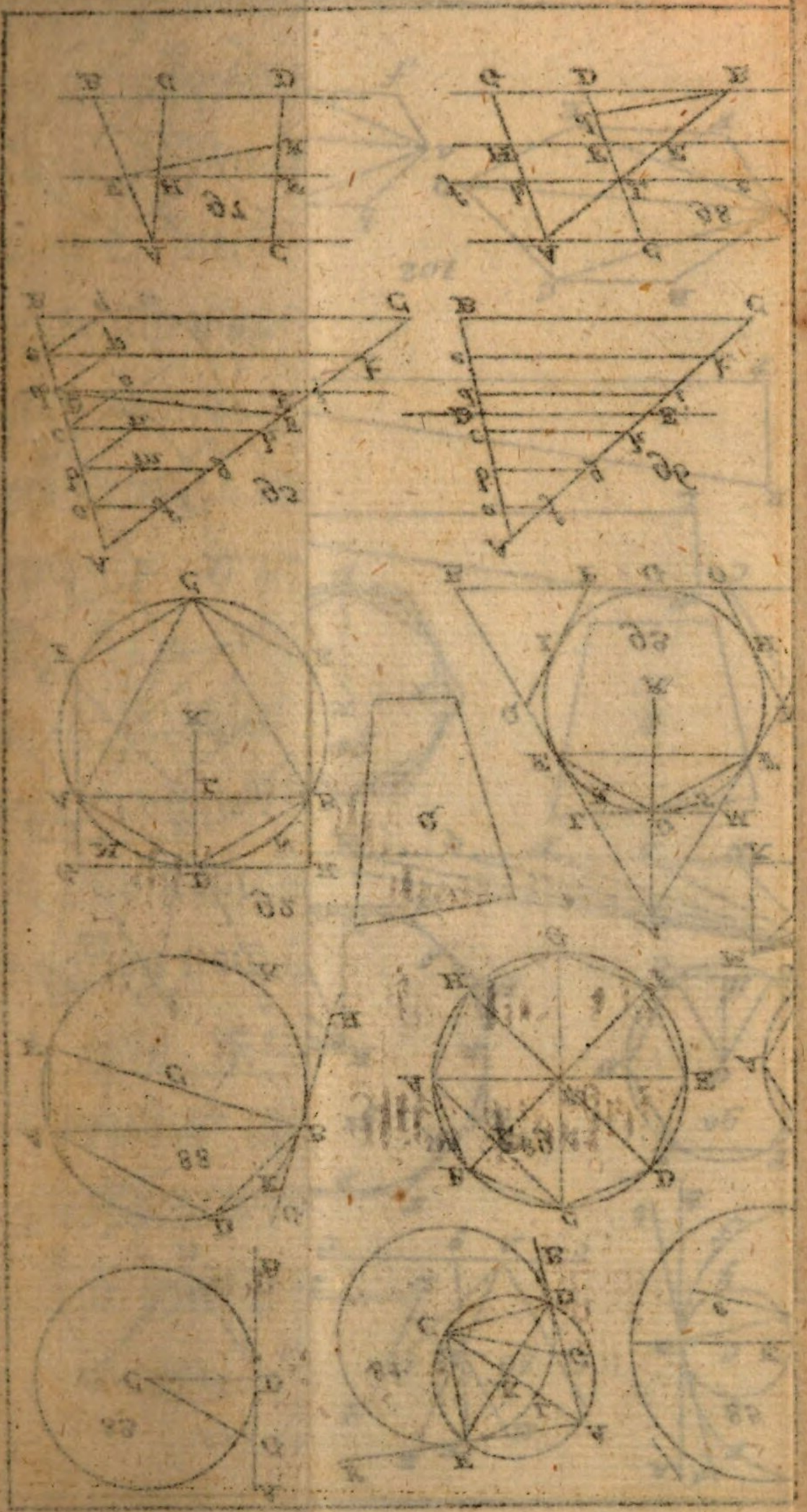






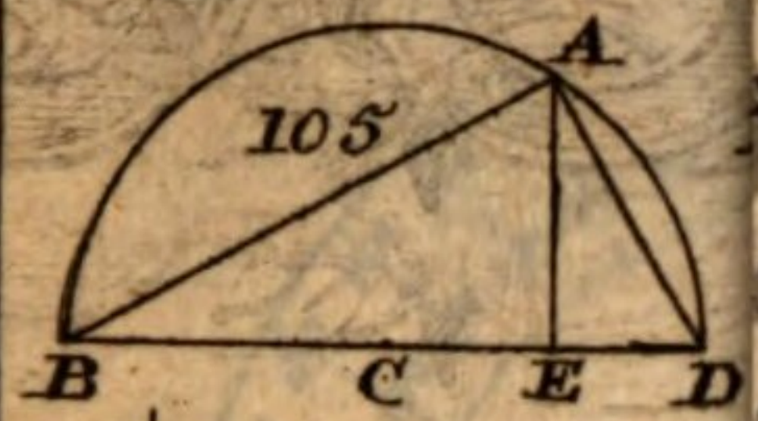


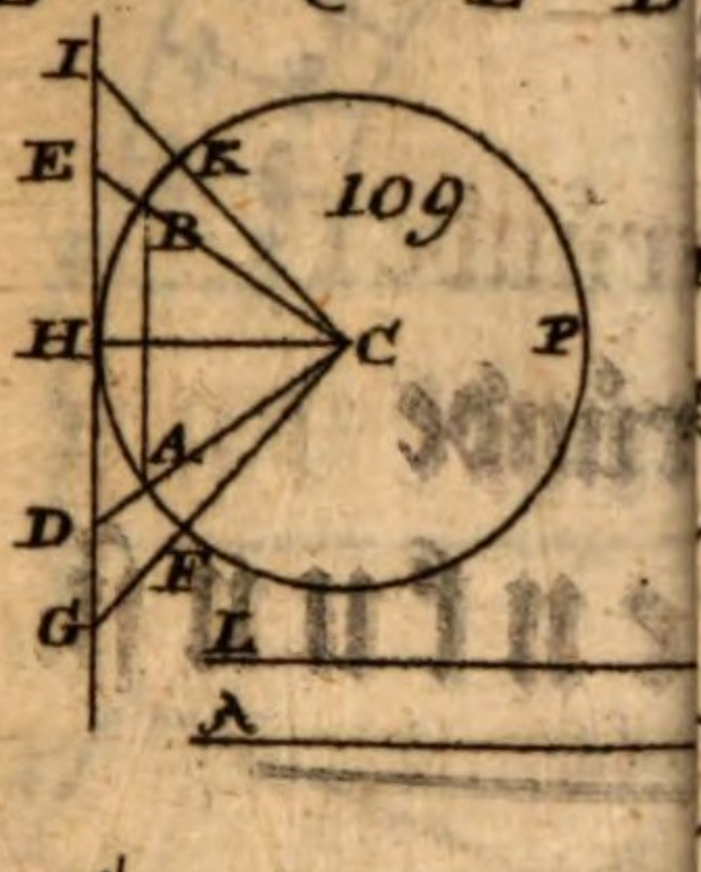
Bayerische
Staatsbibliothek
München

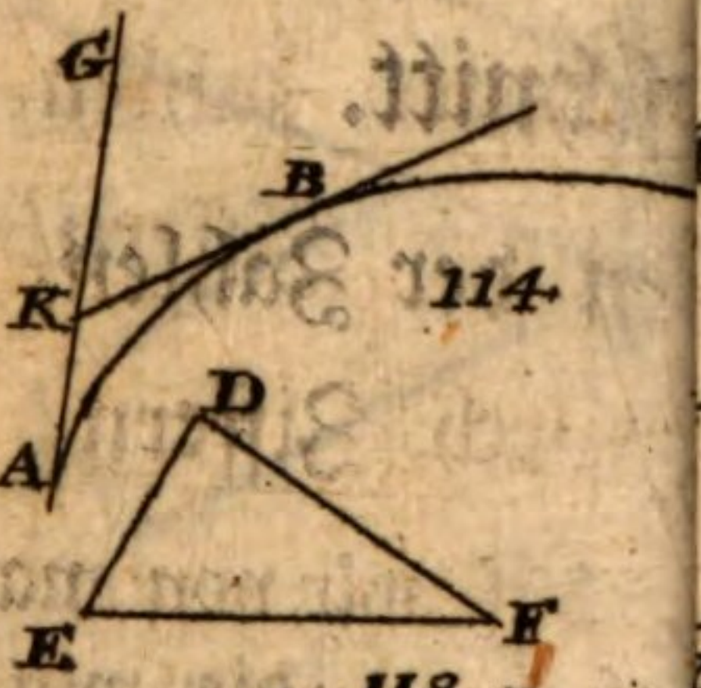


a
b

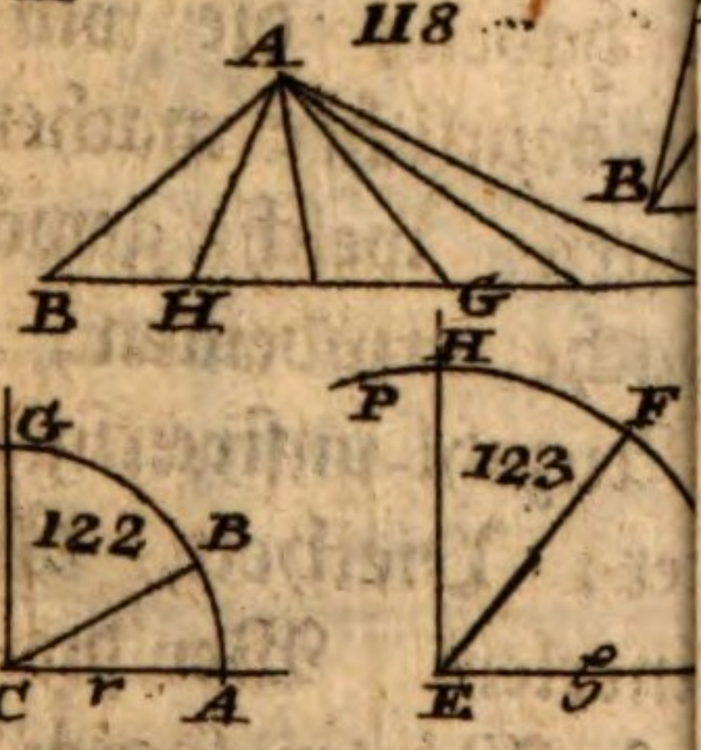
105

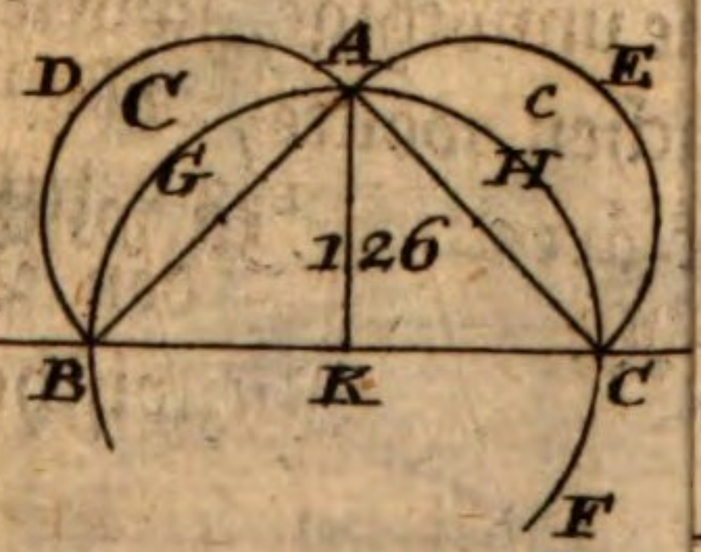






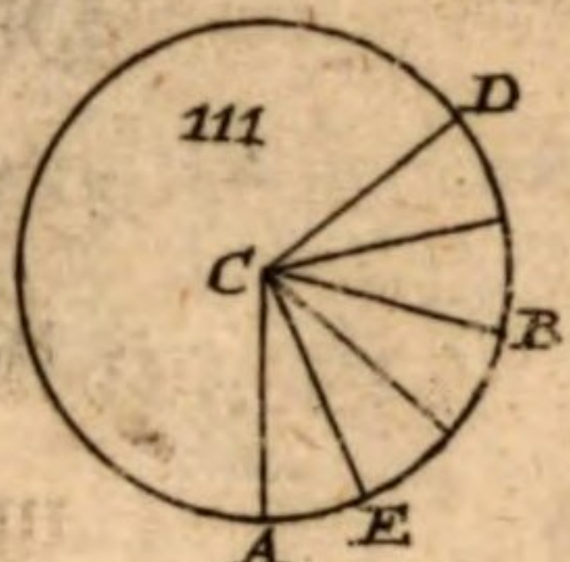
118

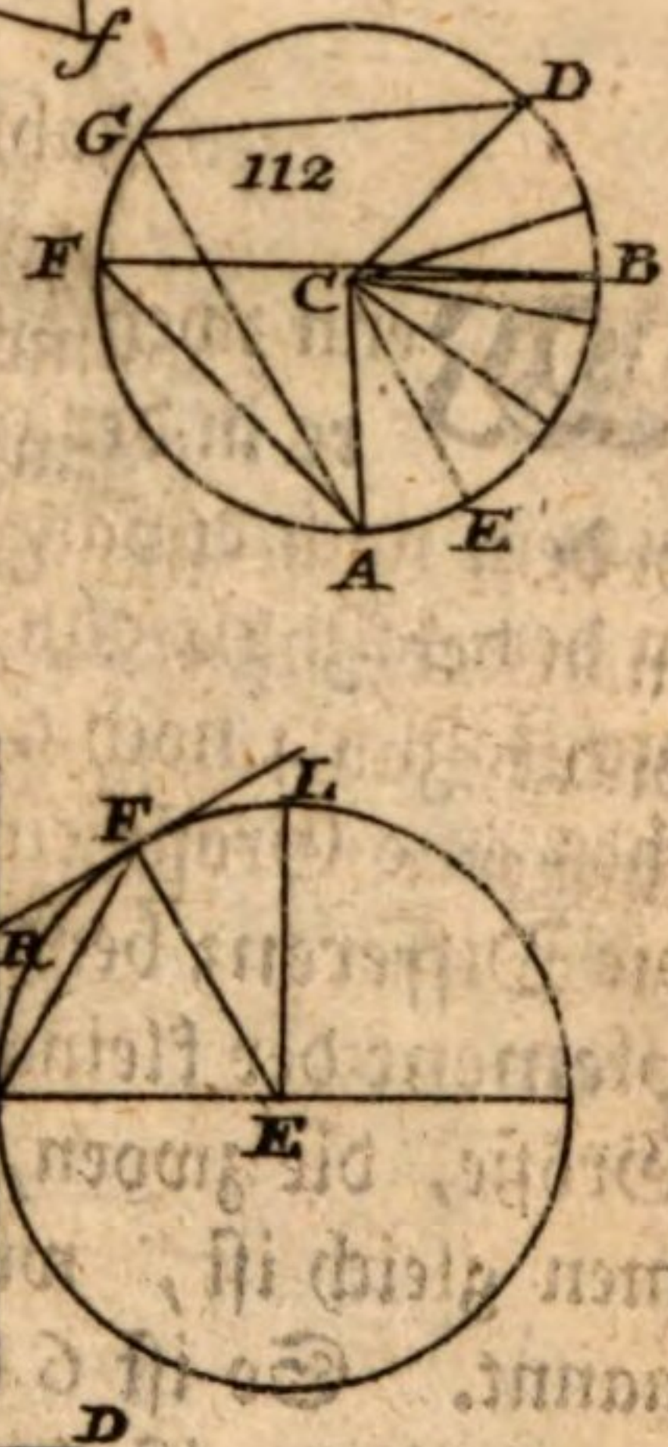




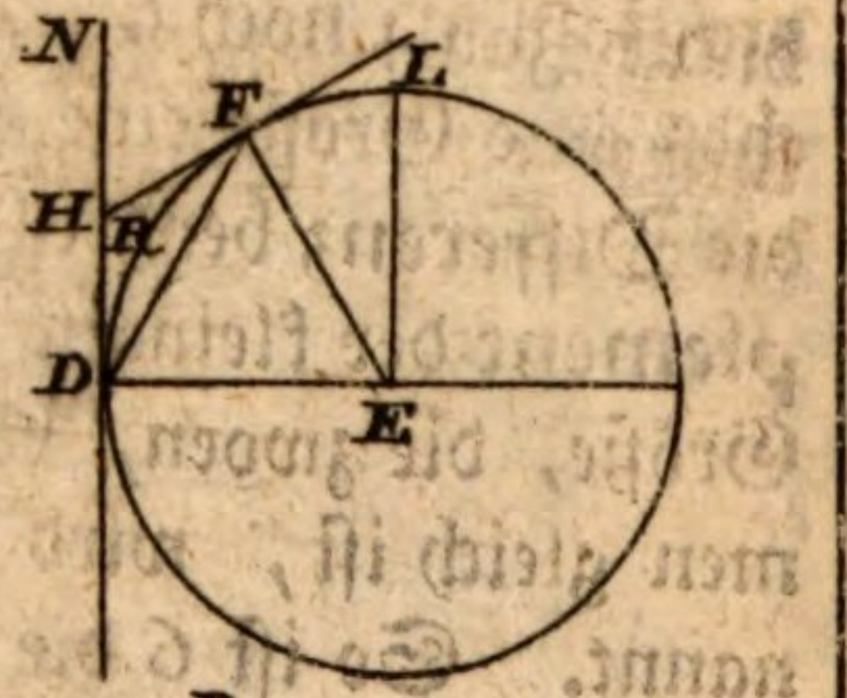
108

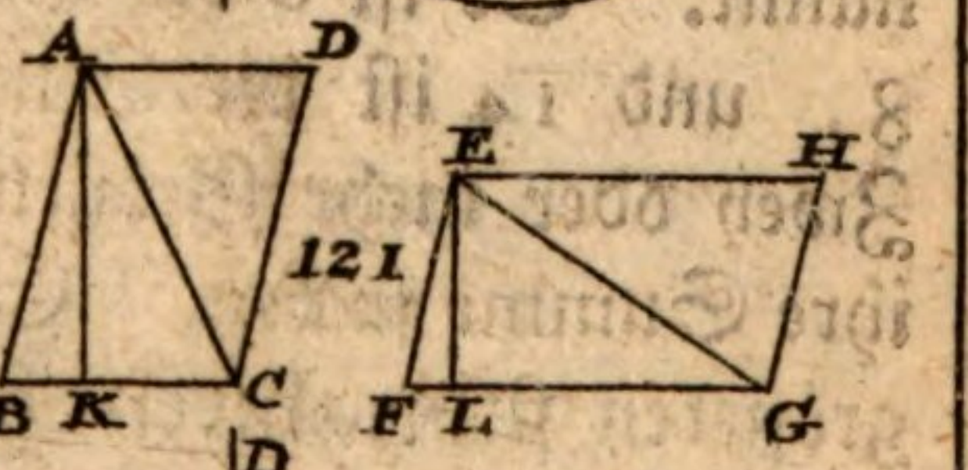
111

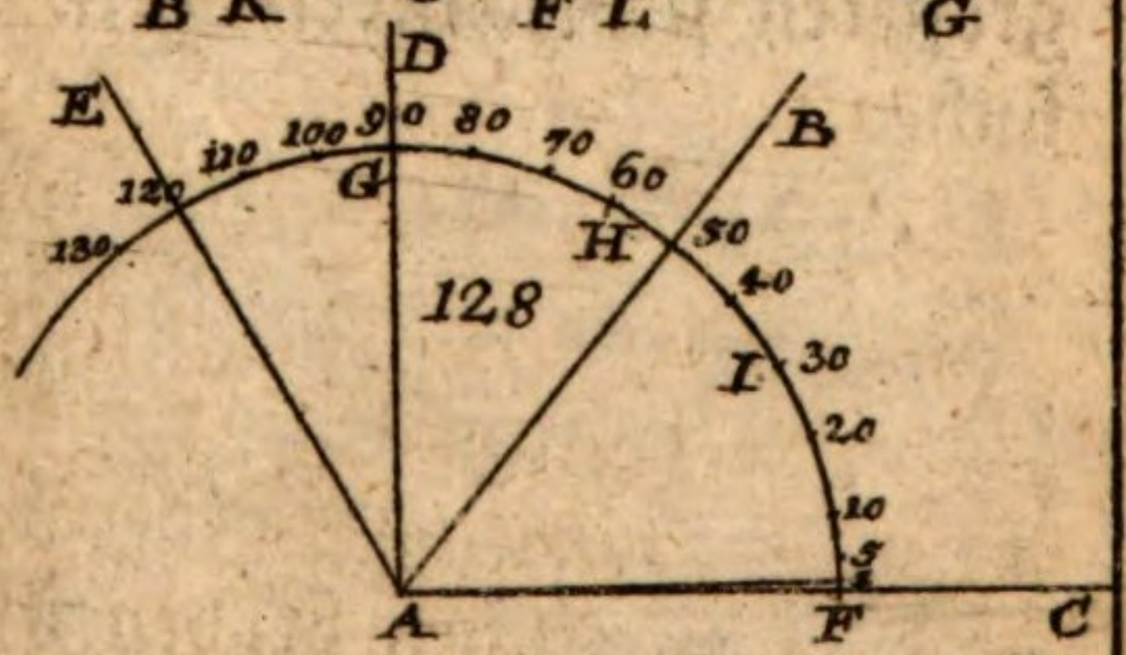




K 117

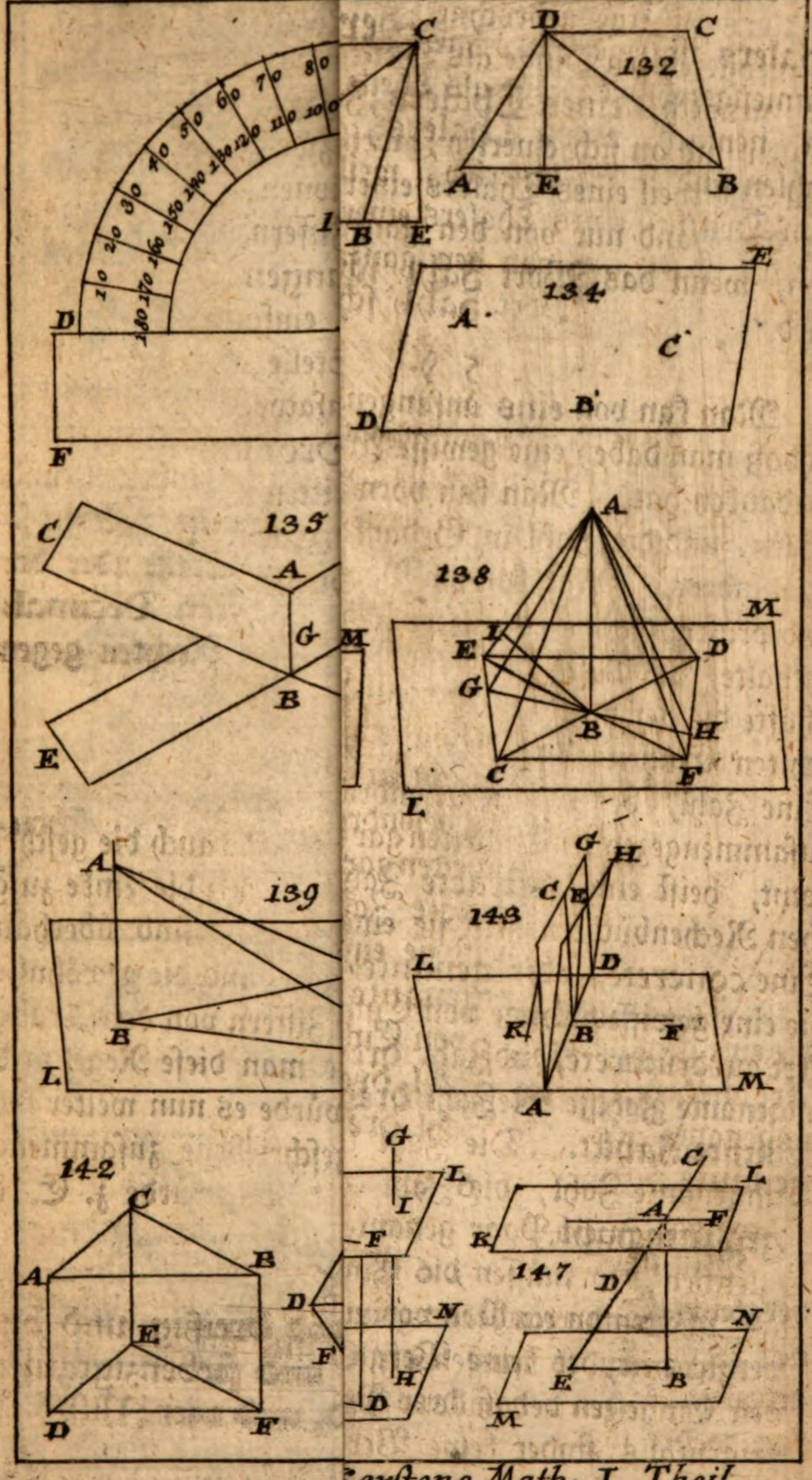




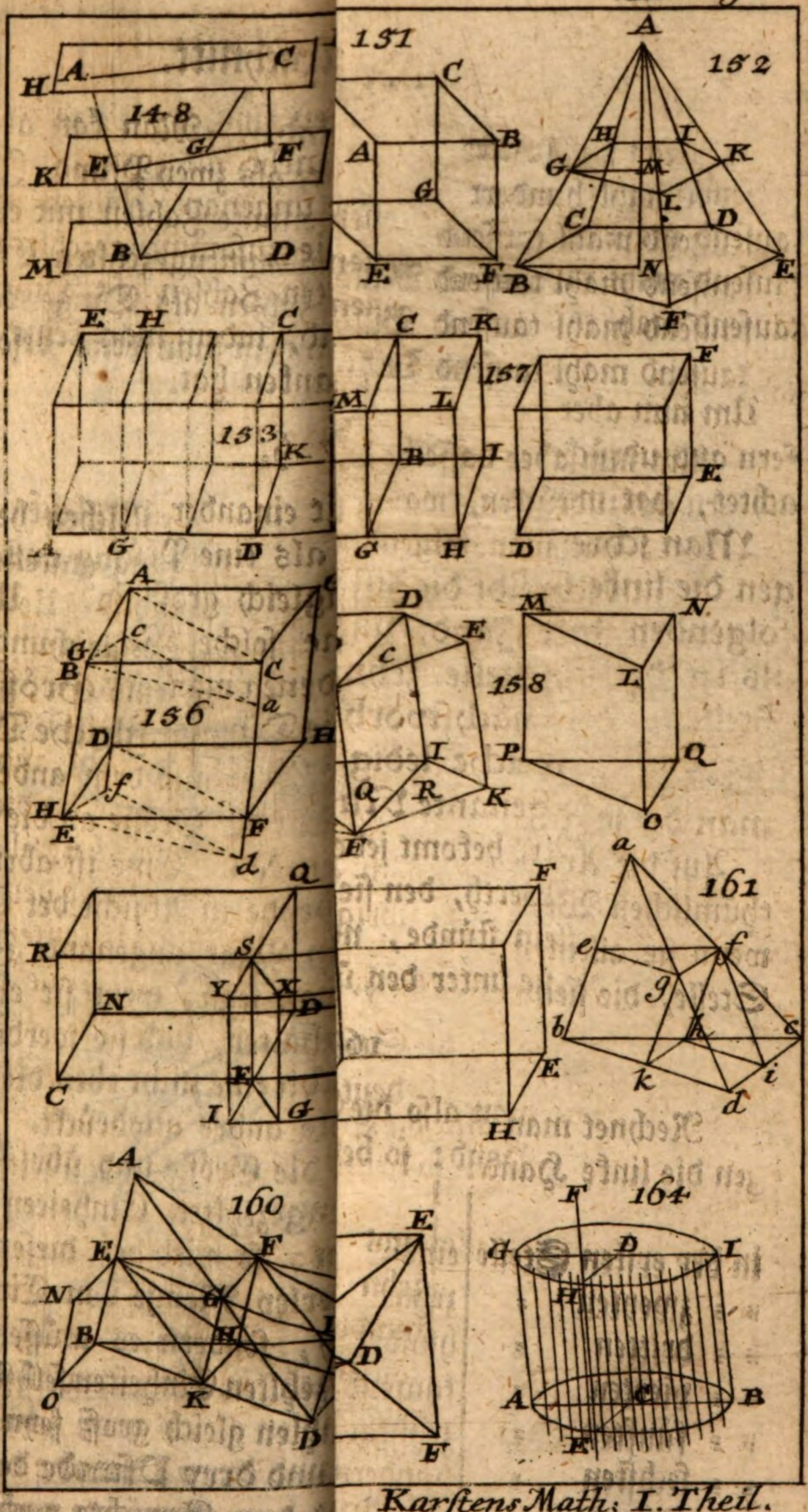


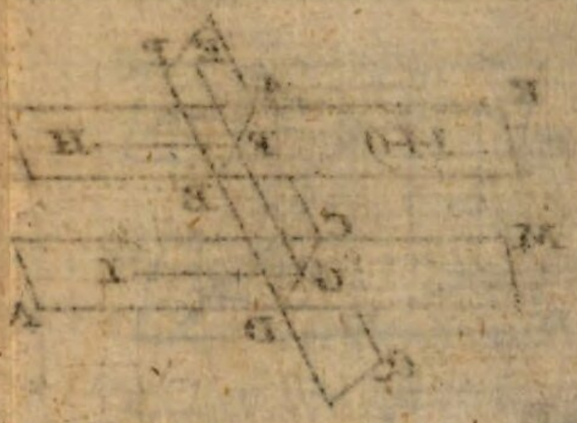
$6\frac{1}{2}$

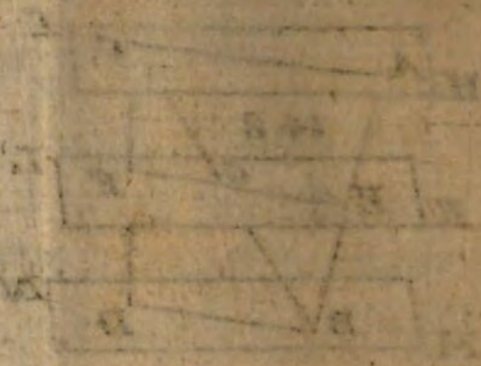
Q

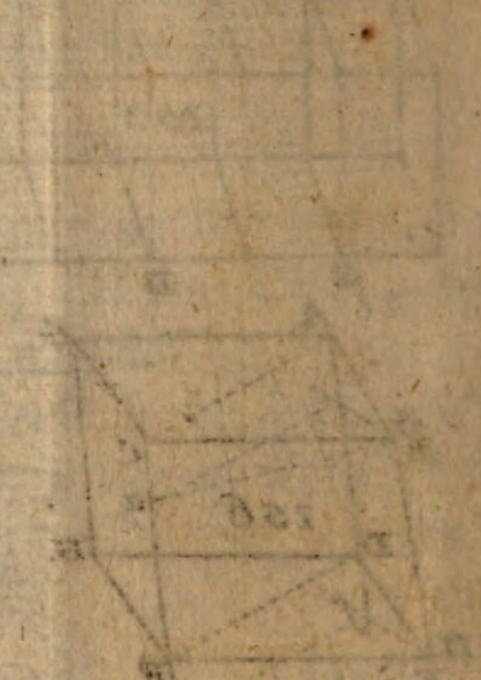


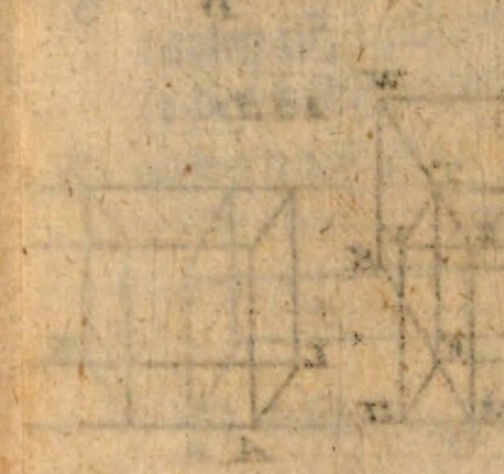
Karstens Math. I. Theil.

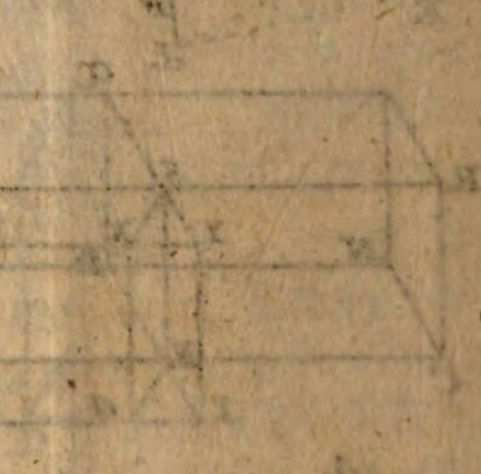

148
151
152
153
156
157
158
160
161
164

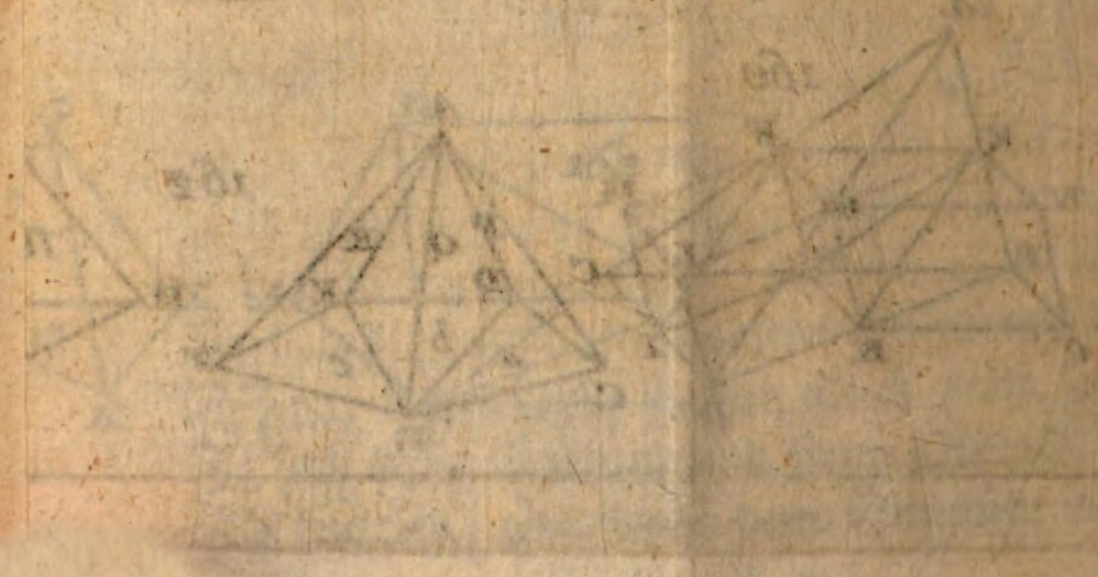




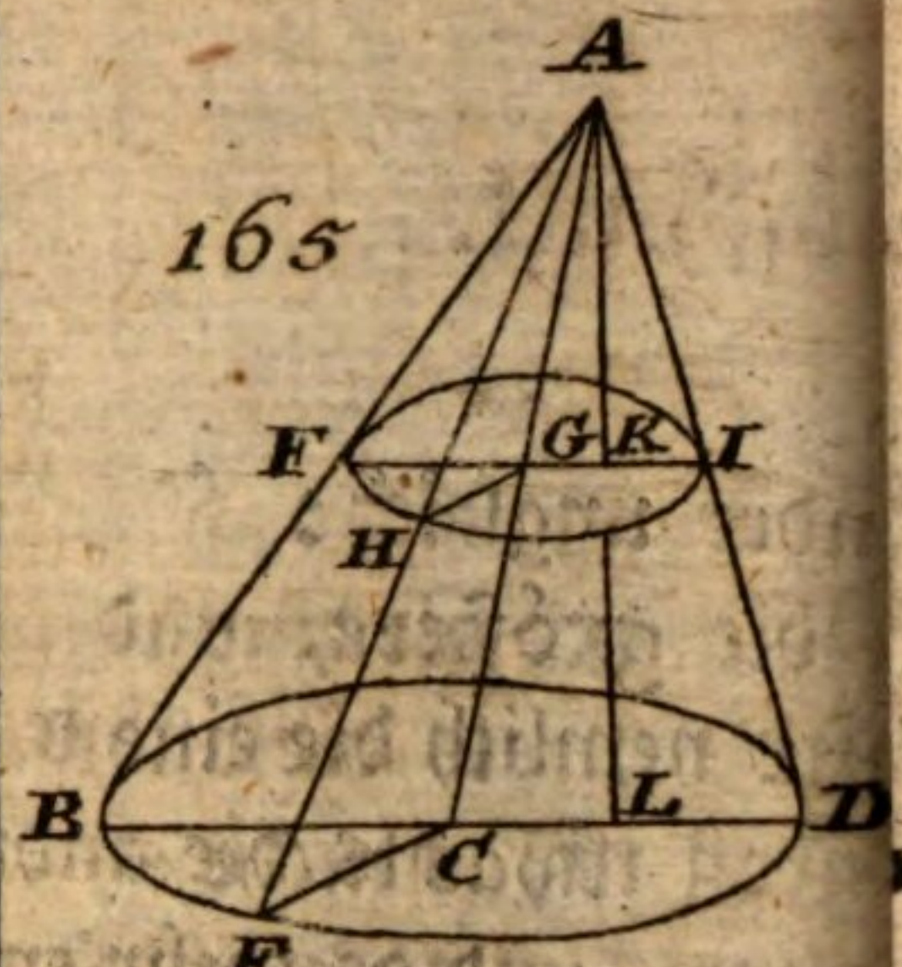




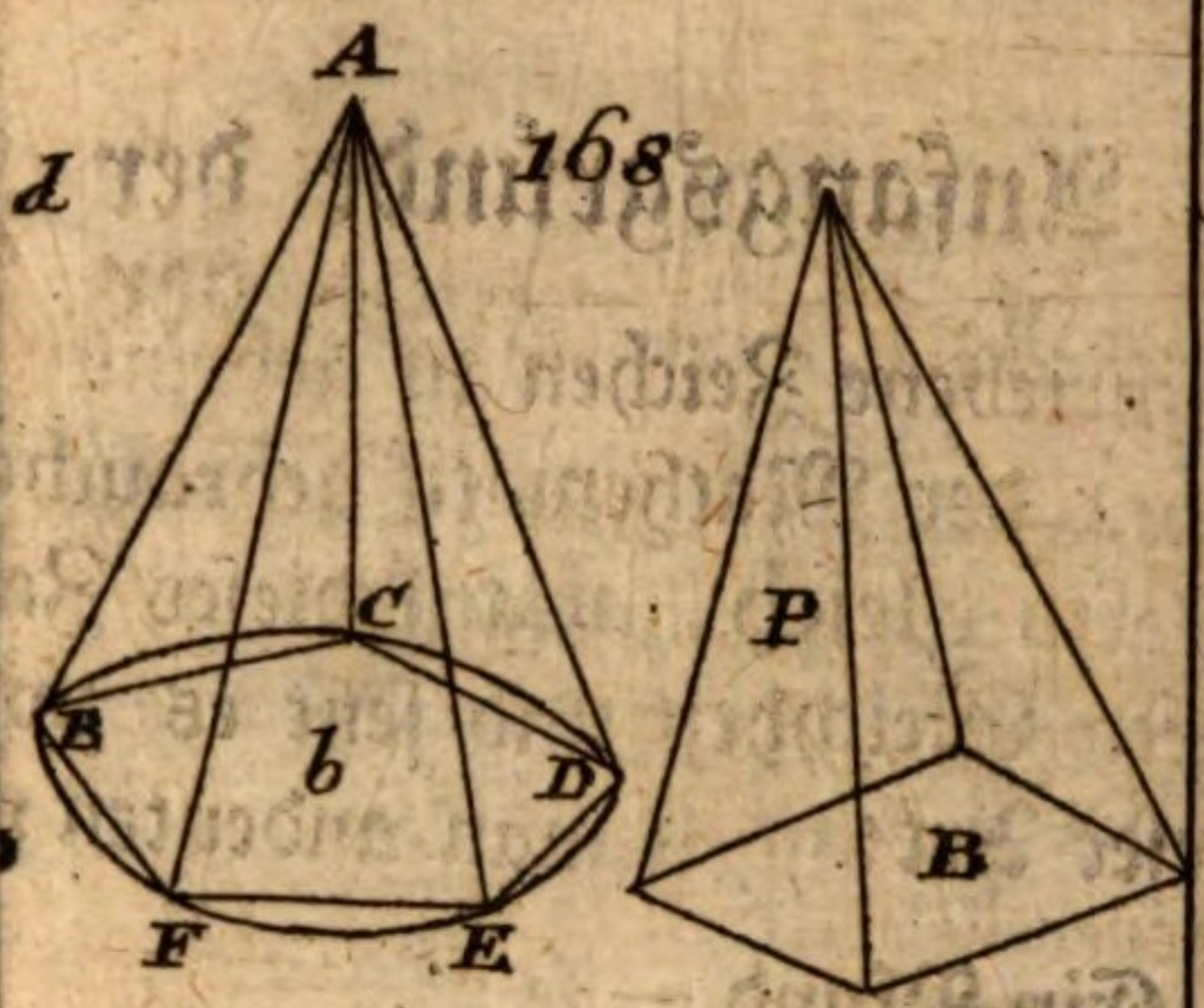




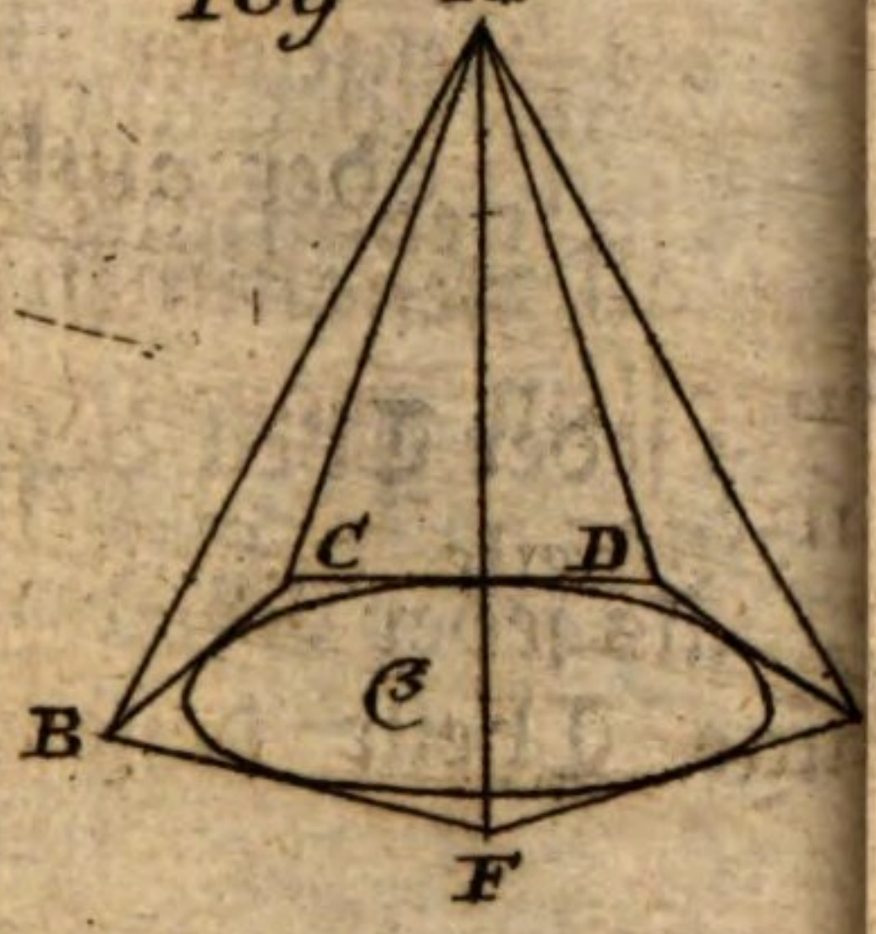
165



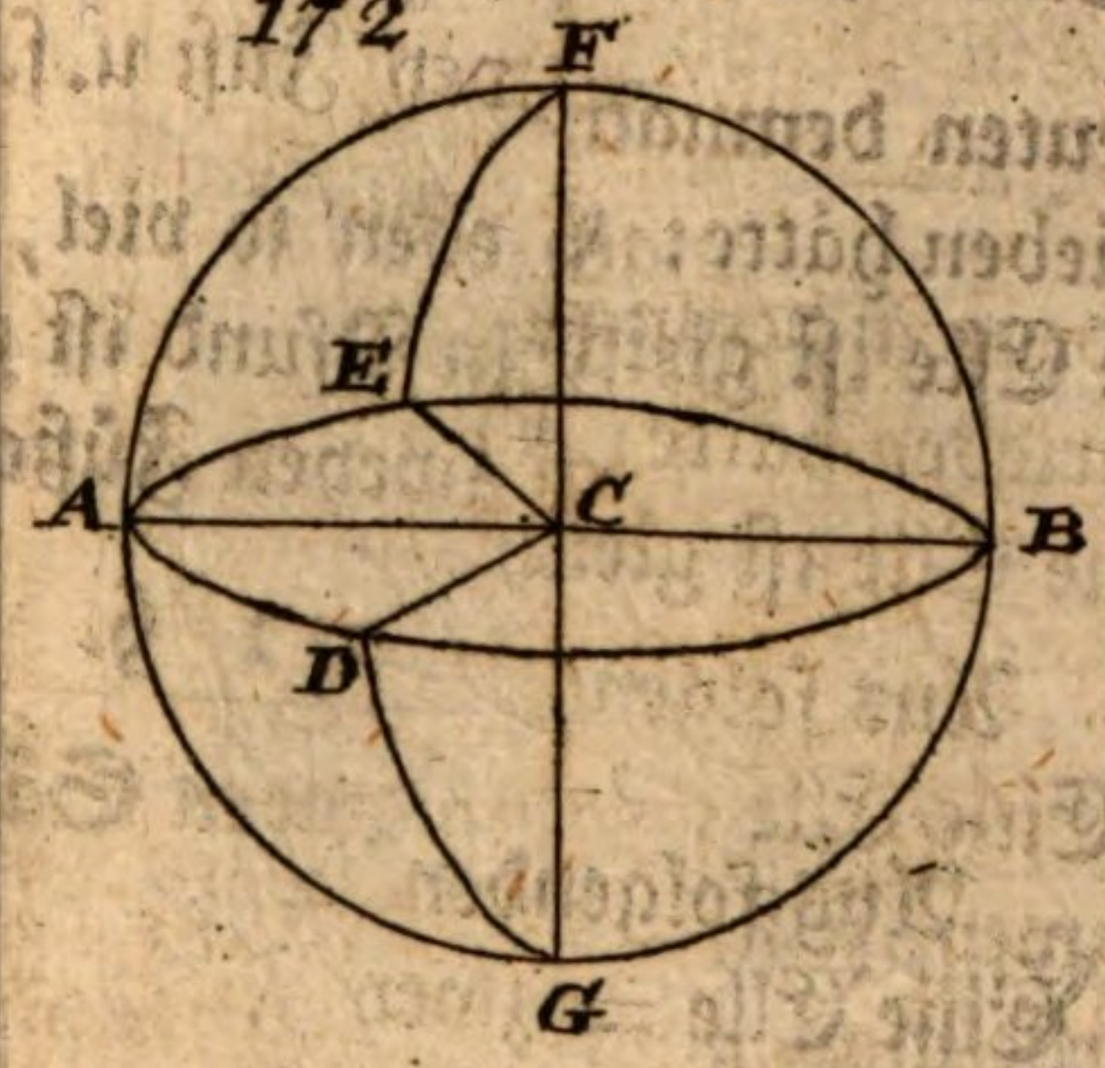
168



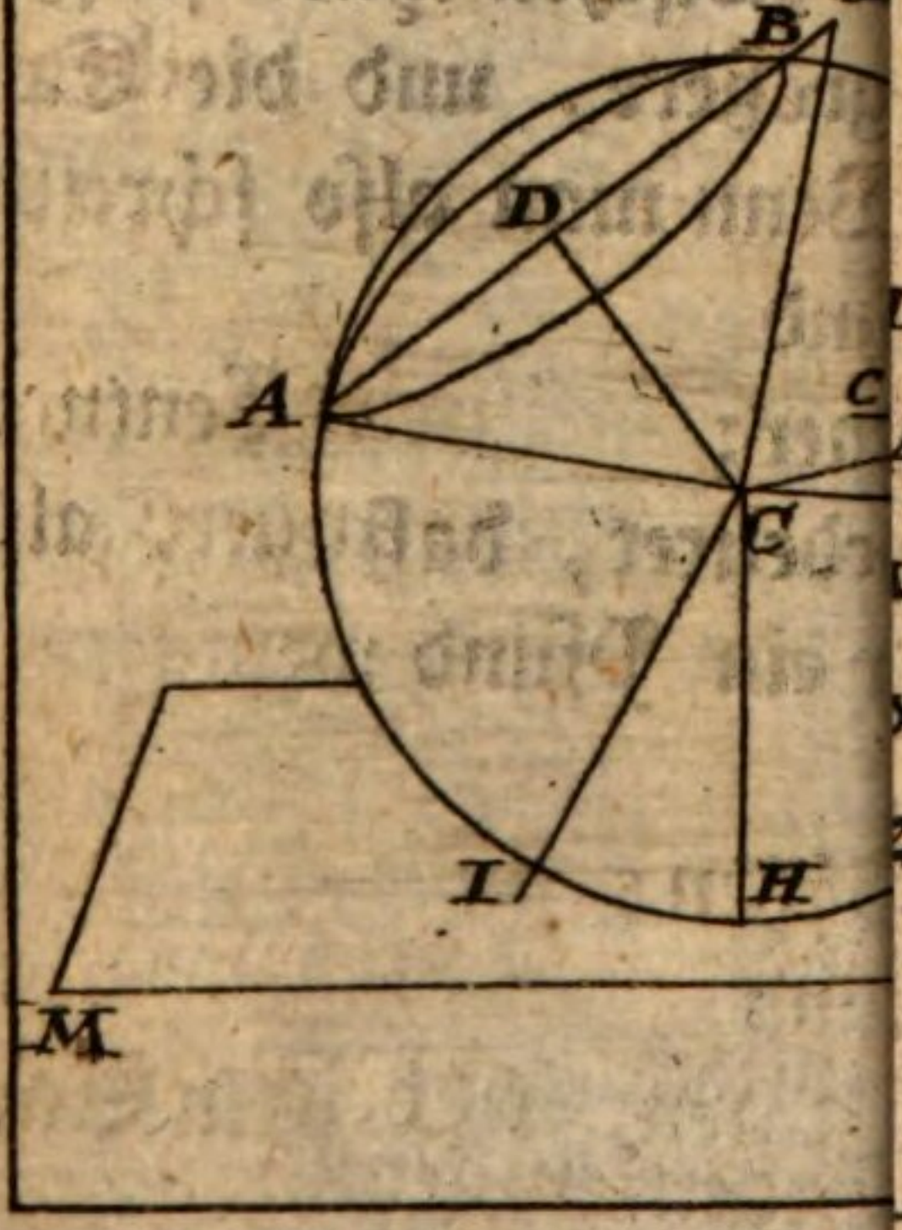
169



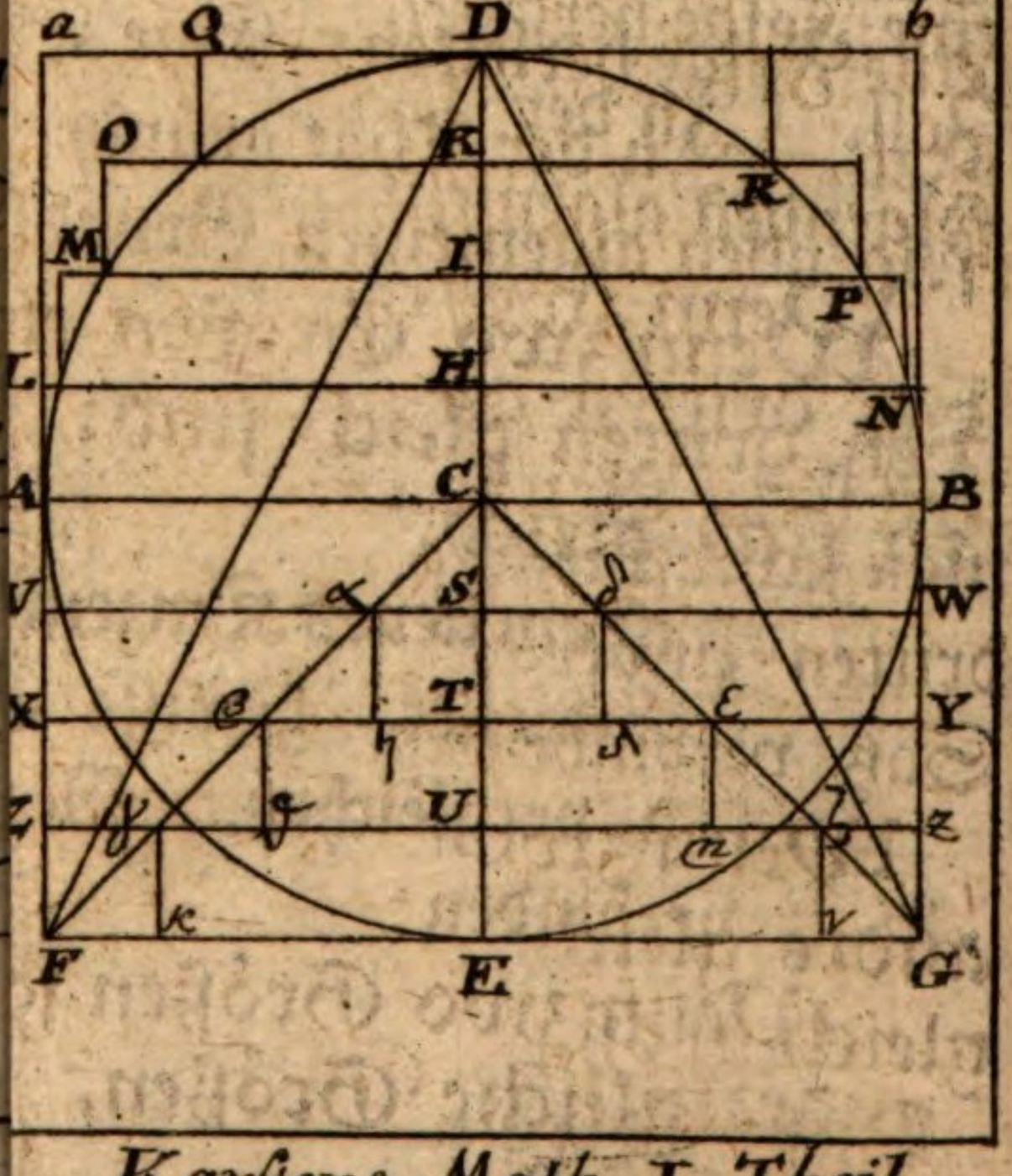
172

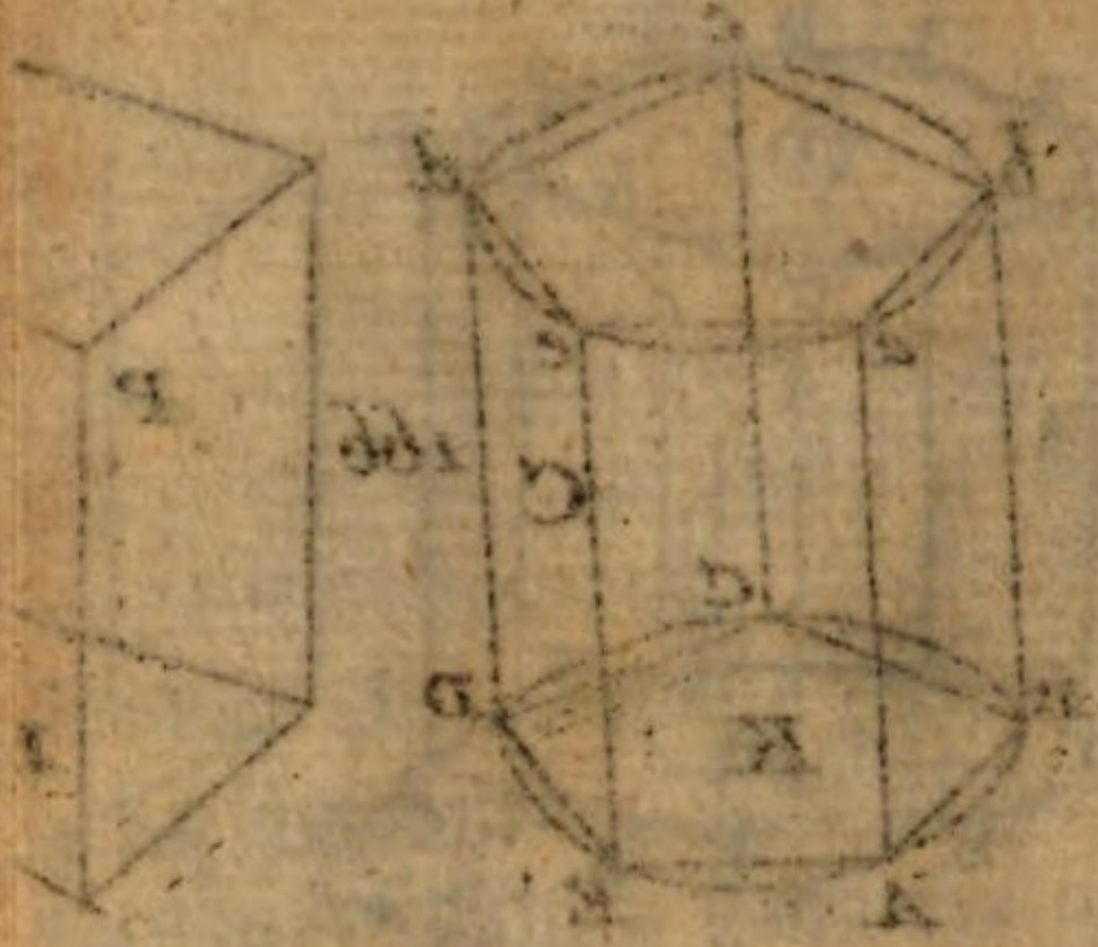


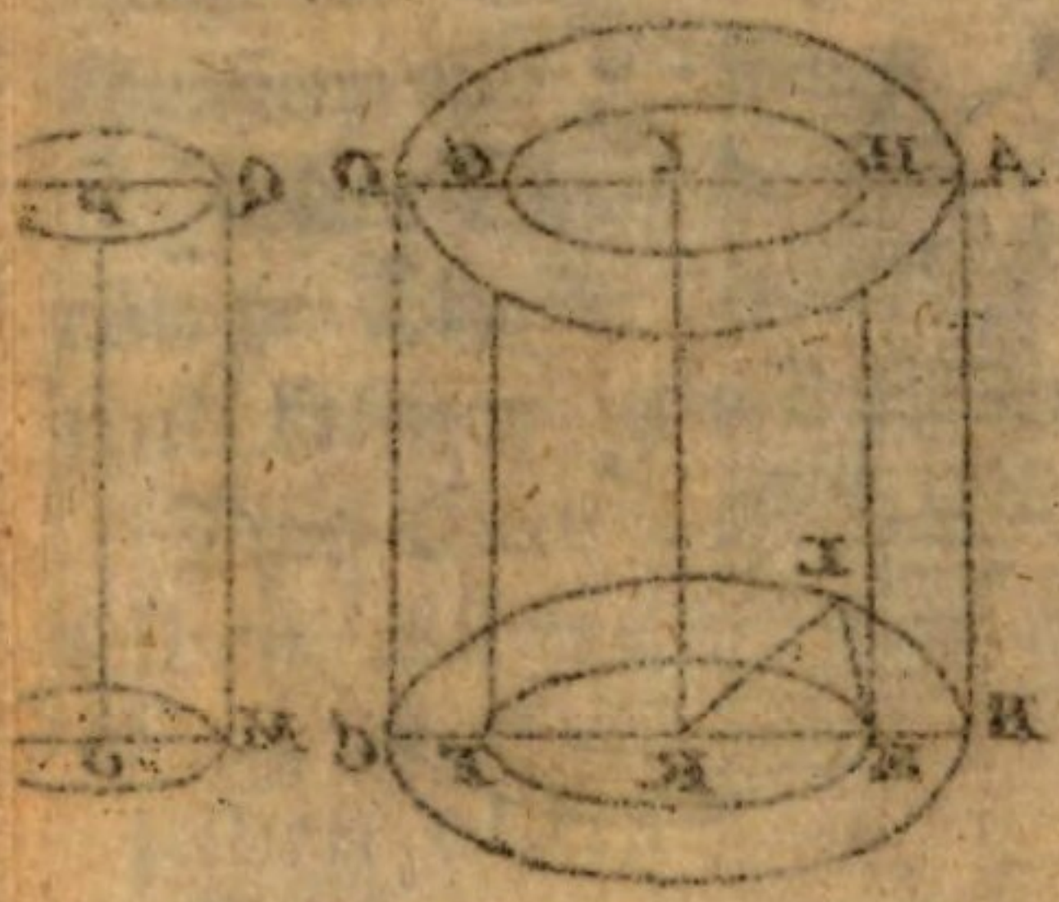
173

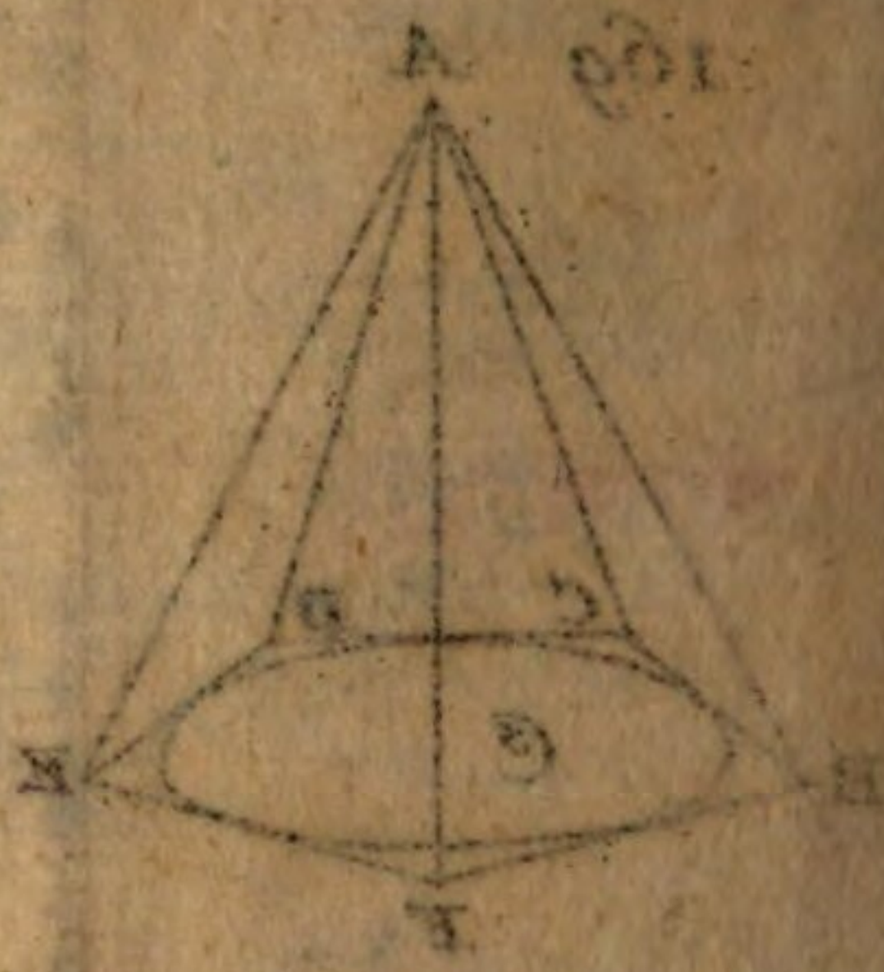


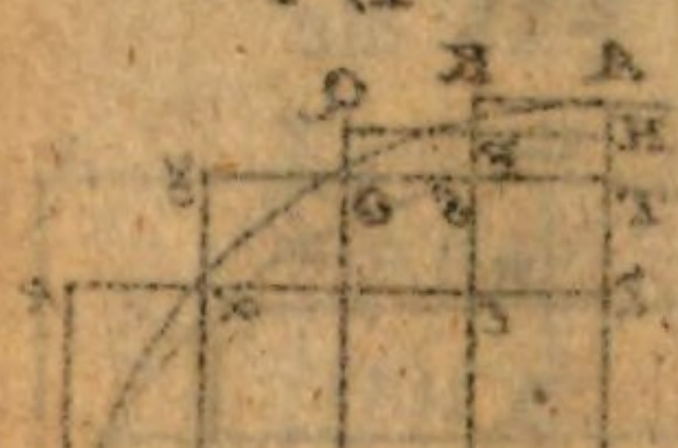
176

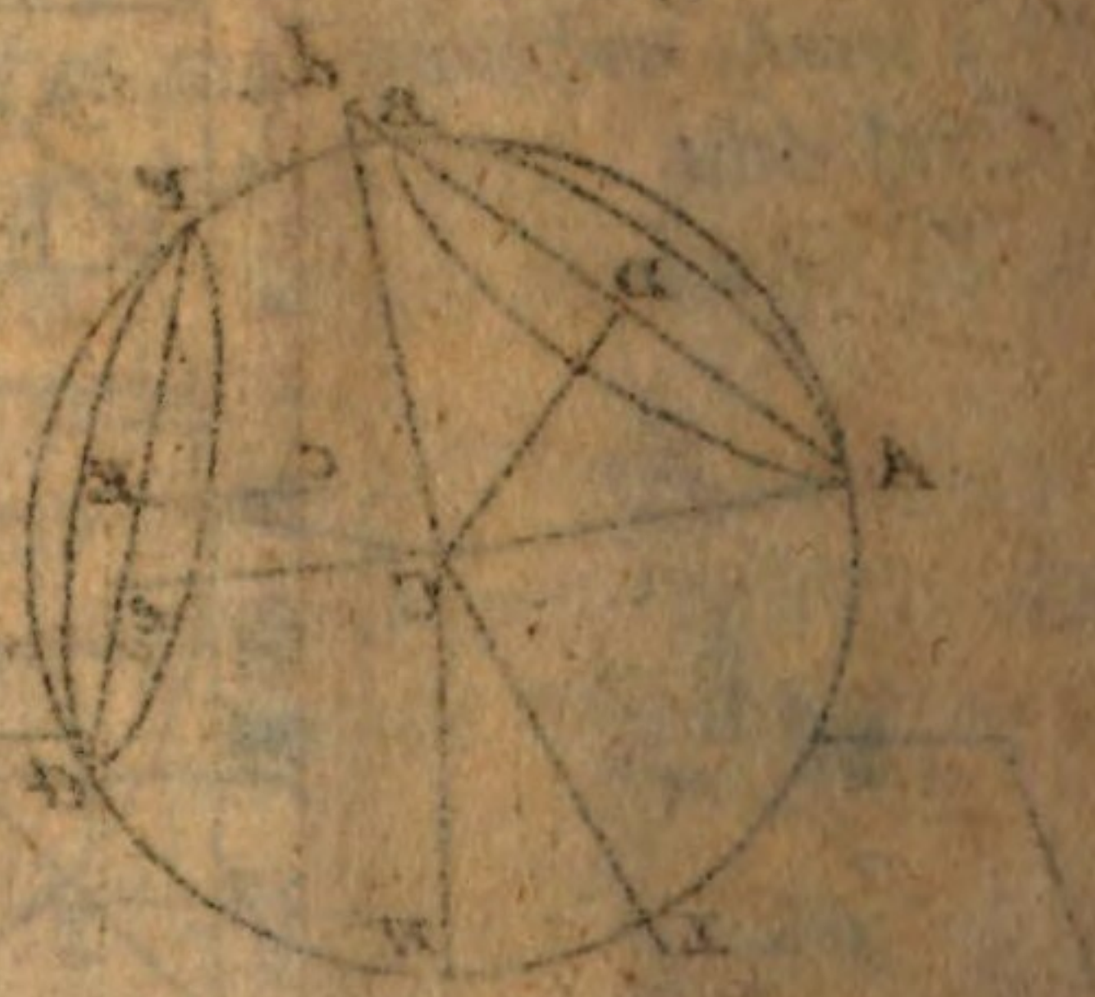












Bayerische
Staatsbibliothek
München

8. G.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Karsten, Wenceslaus Johann Gustav, 1732-1787

Lehrbegrif der gesamten Mathematik

Bd.: 1

Greifswald 1767

Math.u. 85-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594005-2
VD18 80340520-001